Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 6: группы и алгебры Ли; векторные расслоения

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Группы и алгебры Ли: представления

Опр Дифф. гомоморфизм $\rho: G \to GL(V)$ назыв. лин. представл. гр. G в пр-ве V.

Опр $a(g)x = gxg^{-1}$, т.е. $a(g) \in \mathrm{Inn}(G)$ — внутр. автоморфизм.

Если G — лин. гр. Ли, то $a(g)$ есть ограничение на G матричного автоморфизма пр-ва Mat_n: $X \mapsto gXg^{-1}$.

Его дифференциал в $e \in G$ обозн. через $Ad(g) = d_e a(g)$ и называется присоединенным оператором эл-та G.

(Ad : adjoint)

$$Ad(g) \cdot X = gXg^{-1}, \quad Ad(g): \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{g}.$$

Заметим, что $a(gh) = a(g) \cdot a(h)$, поэтому $Ad(gh) = Ad(g) \cdot Ad(h)$

Таким образом, построено линейное представление

$Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$. Оно называется присоед.

представлением (adjoint representation).

Предл. 1) если $F : G \to H$ - гомом. лин. гр. Ли, то

$F(Ad(g)X) = Ad(F(g)) \cdot dF(X)$, $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$

2) Если $G = G^\circ$, то $\operatorname{Ker} Ad = Z(G)$ (центр).

Опр. $\underbrace{\text{гомоморфизм}}_{\text{(отн. } [\cdot,\cdot])}$ $\rho : \mathfrak{g} \to L(V)$ - лин. предст. алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

лин. преобр. на V.

Заметим, что дифф. лин. предст. гр. G — лин. предст. алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

$d_e Ad = ad : \mathfrak{g} \to L(\mathfrak{g})$ - присоед. предст. $\mathfrak{g}$.

Теор $\mathrm{ad}(A)\cdot X = [A,X]$, где $A, X \in \mathfrak{g}$.

Док-во: Рассм. кривую $g(t)$: $g(0) = E$, $g'(0) = A$.

Тогда $\mathrm{ad}(A) = \frac{d}{dt} \mathrm{Ad}(g(t))\Big|_{t=0}$. Следовательно,

$$\mathrm{ad}(A)X = \frac{d}{dt} \mathrm{Ad}(g(t))\cdot X\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} g(t)\cdot X\cdot g(t)^{-1}\Big|_{t=0} =$$

$$= AX - XA = [A,X].$$ $\boxtimes$

Утв $\mathrm{ad}([A,B]) = [\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}(B)]$.

Лемма $Z(G)$ для св. гр. Ли G – есть такая подгр. Ли, касат. алгебра которой явл. центром алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$\mathrm{Lie}(Z(G)) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (или $Z(\mathfrak{g})$) $= \{ z \in \mathfrak{g} \mid [z,x] = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}\}$.

Теор Пусть $R: G \to GL(V)$, $dR: \mathfrak{g} \to L(V)$. Тогда если $U \subset V$ – инв. отн. G, то оно инв. и отн. $\mathfrak{g}$. Если $G = G^\circ$, то верна и обратная $\Rightarrow$: U явл. $\mathfrak{g}$-инв $\Rightarrow$ U явл. G-инв

Следствие Пусть G – связна. Тогда R – неприводимо (соотв. вполне прив.) $\Leftrightarrow$ dR – неприв. (соотв. вполне прив).

Опр Связная гр. Ли назыв. простой, если она не имеет нетрив. связных норм. подгрупп.
Алгебра Ли проста, если она не содержит нетрив. идеалов

Предл (I) Пусть G и H – св. гр. Ли. Тогда след. усл. экв.
1) $H \triangleleft G$ 2) $Lie(H)$ – инв. отн. Ad. 3) $Lie(H)$ – идеал в $\mathfrak{g} = Lie\, G$.

(II) Пусть G – связна. Тогда G – проста $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ – проста.

<u>Примеры</u> 1) $SO_3(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$, $n \geq 5$ — простые гр. Ли.
2) $SO_4(\mathbb{R})$ — не прост. (м. построить гомом. $SU_2 \times SU_2 \to SO_4$)
3) $SL_n(K)$ проста при $n \geq 2$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

<u>Опр.</u> $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ или $Mat_n(\mathbb{C})$. Тогда

A — полупр (п/п) $\iff$ A — диагонализуема ($\exists C: C^{-1}AC = diag$)

A — нильп $\iff$ $A^n = 0$ для некот. $n \in \mathbb{N}$. ($eigen A = \{0, \dots, 0\}$)

A — унип. $\iff$ $(A-E)^n = 0$ ($eigen(A) = \{1, \dots, 1\}$

<u>Предл.</u> 1) Пусть $A \in GL(V)$. Тогда $\exists!$ A_s — п/п, A_u — унип. $A_s, A_u \in GL(V)$. такие что $A = A_s A_u = A_u A_s$.

2) $A \in Mat_n(K) = L(V)$. Тогда $\exists!$ п/п A_s и нильп. A_n:

$$A = A_s + A_n = A_n + A_s,$$

3) Если G - гр. Ли (или алгебр. группа), то $A_s, A_u \in G$.

4) Если $F: G \to H$ - гомом. гр. Ли, тогда

$$F(A_s) = F(A)_s \quad и \quad F(A_u) = F(A)_u.$$

Опр Тор - связная коммут. группа T из п/п эл-тов

Упр ($\Leftrightarrow$ все диагонализуемы, т.е. $\exists C: C^{-1} T C \subset diag$).

($\Leftrightarrow$ $T = GL_1 \times \ldots \times GL_1 = \left[\begin{matrix}(\mathbb{R}^*)^n \\ (\mathbb{C}^*)^n\end{matrix}\right.$)

Опр Радикал гр. Ли G $\mathrm{Rad}\, G$ — макс. св. норм. разр. подгр Ли.

Унип. радикал $\mathrm{Rad}_u G$ — макс. св. норм. унип. подгр. Ли.

Группа Ли G — редуктивна, если $\mathrm{Rad}_u G = 1$

— п/п, если $\mathrm{Rad}\, G = 1$.

Всякая п/п группа явл. редуктивной.

Теор 1) $G/\mathrm{Rad}\,G$ — п/п ; $G/\mathrm{Rad}_u\,G$ — редукт.

2) Если G — полупр., связна, тогда $G = G_1 \times \ldots \times G_s$, где все $G_j \lhd G$ — связные норм. подгр, простые, и если $H \lhd G$ явл. связной, то $H \cong G_j$ для некот. j.

Теор. Св. компакт. гр. Ли G редукт., если она имеет компакт. вещ. форму.

Теор. Всякое лин. предст. ред. гр. Ли вполне привод.