Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 5: группы и алгебры Ли

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1 Группа Ли

Опр Группа Ли G — это группа, снабженная стр-рой гладкого многообразия таким образом, что групповые операции явл. гладкими:

$\mu(x,y) = x\cdot y$ и $i(x) = x^{-1}$ – гладкие отобр.

$\mu : G\times G \to G$; $i : G \to G$.

Опр Линейная группа Ли — $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ или $GL_n(\mathbb{C})$.

Утв Если $G \subset GL_n(\mathbb{R})$, то $T_g G = g\cdot T_e G$

Примеры 1) $G = GL_n(\mathbb{R}) \subset Mat_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

$\det g \neq 0$. $\quad G$ – n^2-мерная группа Ли

$$g_1\cdot g_2 = \begin{pmatrix} \cdots\cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum g_{1,ij}\cdot g_{2,jk} \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \frac{1}{\det g}\begin{pmatrix} G_{ij} \end{pmatrix}$$

$\Uparrow$

$\Rightarrow$ гладкие

$\rightarrow$ отобр

2) $G = SL_n(\mathbb{R}) \subset Mat_n(\mathbb{R})$ - гл. (n^2-1)-мерное мн-е.

$SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \mid \det A = 1 \}$ $\quad d_e(\det g) = \operatorname{trace}(dg)$

Аналогично проверяем групповые операции.

3) $O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = E \}$.

$$\dim O_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R}).$$

4) $O_{p,q}(\mathbb{R}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^T I_{p,q} A = I_{p,q} \}$, где $n = p+q$

$I_{p,q} = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, -1, \dots, -1)$.

$O_{p,q}(\mathbb{R}) \cong O_{q,p}(\mathbb{R})$.

$\dim O_{p,q}(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$; $\quad SO_{p,q} = O_{p,q} \cap SL_n$

5) Группа невырожд. треуг. матриц $B_n(\mathbb{R}) \subset$ группа всех треуг. $T_n(\mathbb{R})$

$$\left\{ \begin{pmatrix} g_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{nn} \end{pmatrix} \right\}_{g_{ii} \neq 0} \subset \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim B_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

унит. группа

6) $U_n(\mathbb{C}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^*A = E \}$, $A^*A = AA^*$

$$A^* = \overline{A^T}$$

С точки зрения $\mathbb{R}$-многообразия имеем n^2 ур-ий:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2 = 1 \ ; \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\mathrm{Re} \sum_k a_{ik} \cdot \overline{a_{kj}} = \mathrm{Im} \sum_k a_{ik} \cdot \overline{a_{kj}} = 0 \quad \left(\begin{matrix} i, j = 1, \ldots, n \\ i < j \end{matrix} \right).$$

Дифференцируем ур-я в e: $(dA) + (dA)^* = 0$

Остается заметить, что $\dim_{\mathbb{R}} GL_n(\mathbb{C}) = 2n^2$;

n^2 – вещ. ур-ий, и $\dim_{\mathbb{R}} T_e U_n = n^2$ (т.е. $2n^2 - n^2 = n^2$).

7) $SU_n(\mathbb{C}) = U_n(\mathbb{C}) \cap SL_n(\mathbb{C})$.

2. Свойства групп Ли

<u>Утв.</u> Всякая группа Ли $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ замкн. в $GL_n(\mathbb{R})$.

<u>Опр</u> $G^0 \subset G$ — связная компонента $e \in G$.

<u>Предл.</u> $\underset{\text{норм. подгр}}{G^0 \triangleleft G}$; ост. св. компоненты — см. классы $G/_{G^0}$.

<u>Док-во:</u> Заметим, что gG^0 и $G^0 \cdot g$ — св. компоненты содерж. g, причем $l_g(x) = gx$ и $r_g(x) = xg$ - гомеоморфизмы из G в G. След, $gG^0 = G^0 \cdot g$.
(если $g \in G^0$, то $gG^0 = G^0$).

Также ясно, что $g \mapsto g^{-1} = i(g)$, есть эл-т $\mathrm{Homeo}(G)$.
Значит, $i(G^0) = G^0$. След, G^0 — норм подгр. $\boxtimes$

<u>Предл.</u> Связная группа Ли порождается любой своей окр-тью e.
(т.е. $G^0 = \langle U(e) \rangle$)

3. Касательная алгебра, алгебра Ли, экспоненц. отобр.

Экспоненц. отобр. $\exp: A \longmapsto e^A$; $\exp: \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, описывает связь $T_e G$ и группы Ли G.

Известно, что $e^0 = E$, $\exp X = E + X + X^2/2 + \ldots =$
$$= E + X + o(\|X\|).$$

Также будем полагать известным:

1) $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, если $AB = BA$;

2) $\det \exp A = e^{\operatorname{tr} A}$.

Утв Сущ. обр. отобр. $\log: G \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$:
$$\log(E+X) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{X^n}{n} \quad (\text{абс. сход. при } \|X\| < 1).$$

Предл. Пусть $g(t)$ — гладкая кривая в $GL_n(\mathbb{R})$, т.ч. $g(0)=E$, $g'(0)=A$. Тогда $\exp A = \lim\limits_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n}\right)^n$

Идея док-ва:

- $\log g(t) = tA + o(t)$
- $g(t) = \exp(tA + o(t))$
- $g(1/n) = \exp\left(\frac{A}{n} + o(1/n)\right)$
- $g(1/n)^n = \exp(A + o(1))$.

Теор Пусть $G < GL_n(\mathbb{R})$ — гр. Ли. Тогда $\exp(T_e G) \subset G$, причем $\exp$ — диффео окр-ти $0 \in TG$ и окр-ти $U(e) \subset G$.

(без док-ва).

Примеры 1) $G = SL_n(\mathbb{R})$, тогда $\det \exp A = 1$ для $A \in T_e G$

2) $G = O_n(\mathbb{R})$, тогда $T_e G$ — пр-во кососимм матриц.

Следовательно, $\exp$(кососимм) = симм. матрица.

Теор Связная группа Ли однозн. опред. касат. пр-вом $T_e G$.

($G = \exp(U(e)) = \exp(T_e G)$.)

(гладкий гомом.)

Теор Пусть $F: G \to H$ – гомоморфизм групп Ли.

Тогда $F(\exp A) = \exp(dF(A))$ для всякой $A \in T_e G$.

Док-во: Пусть $g(t)$ – та самая кривая в G, т.ч.

$g(0) = E$, $g'(0) = A$. Тогда

$F(g(t)) = h(t)$ – кривая в H: $h(0) = E$, $h'(0) = dF(A)$.

След., $F(\exp A) = F(\lim_n g(1/n)^n) = \lim_n h(1/n)^n = e^{dF(A)}$.

(Пример: $F := \det : G \to \mathbb{R}^*$.)

$d_E \det = \mathrm{tr}$

Теор Гомоморфизм св. гр. Ли однозн. опред-ся дифф-ом в $E \in GL_n$.

Утв. $\operatorname{Ker} F$ – подгр. Ли в G, причем $T_e \operatorname{Ker} F = \operatorname{Ker} dF$.

Опр. $[A,B] = AB - BA$ — коммутатор матриц.

Предл Для всех $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$:

$$[A,B] = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial s}\Big|_{t=s=0} (e^{tA}, e^{sB}), \text{ где } (A,B) = ABA^{-1}B^{-1}.$$

Теор Касат. пр-во T_eG группы Ли $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ замкн относит. опер. $[\cdot,\cdot]$.

Док-во: $g(s) = (e^{tA}, e^{sB}) \subset G$ при фикс. t.

$g(0) = E \Rightarrow g'(0) = \frac{\partial}{\partial s}(e^{tA}, e^{sB})\Big|_{s=0} \in T_eG$.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial s}(e^{tA}, e^{sB}) = [A,B] \in T_eG.$$

Предл. Вып. соотн Якоби: $[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = 0$.

Опр T_eG с кососимм. опер. $[A,B]$ ($= AB - BA$ в данном случае), удовл. соотн. Якоби, назыв. алгеброй Ли и обозн. $\mathrm{Lie}(G)$.

Теор Дифф. гомоморфизма групп Ли явл. гомом. алгебр Ли, т.е. если $F: G \to H$, то $dF: \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(H)$.