Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 4: теоремы Уитни, трансверсальность

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

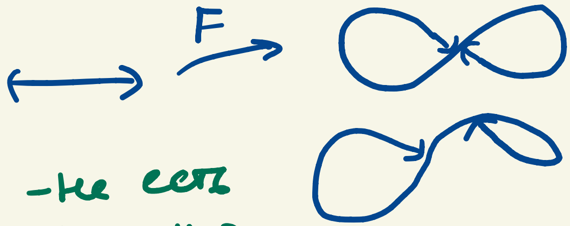
1. Слабая теорема Уитни о вложении и погружении.

Напомним, что $F: M \to N$ ($\in C^\infty$) — погруж., если d_pF — инъект. $\forall p \in M$.

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} d_pF = \dim M \le \dim N$.

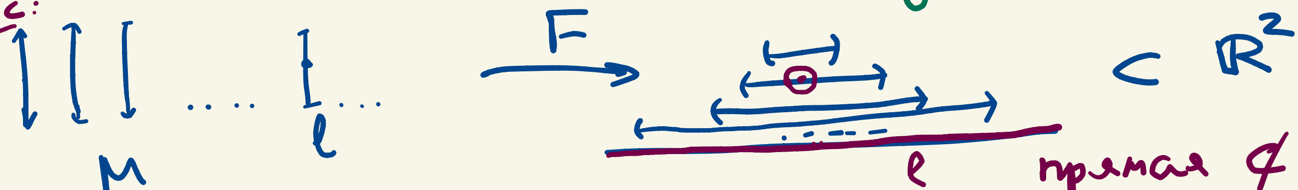
F — вложение, если F — погр $+$ $M \cong F(M)$.

Примеры 1) Погр, но не влож (1–1):



2) $F: M \to N$ влож, но $F(M) \subset N$ — не есть подмн-е.

Вопрос:



прямая $\notin F(M)$

Вопрос: Будет ли $\tilde{M} = F(M) \cup \ell$ — подмн-е в $\mathbb{R}^2$?

$U \subset \mathbb{R}^d$ — подмн-е, если $\forall x \in U$ $\exists$ окр-ть, в которой $\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ u_d = \varphi_d(x_1, \dots, x_m) \end{cases}$ с J max ранг

Регулярные кривые и поверхности

Опр $t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ – наз. регул. кривая, если $\|\gamma'(t)\| \neq 0$.

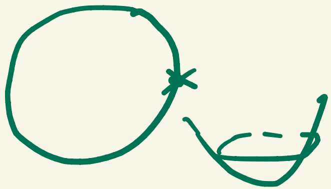
$\gamma: \mathbb{R}^1 \to \gamma(\mathbb{R}^1) \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ – погруж. т.к.

регул. $d\gamma$ – сюр. rank $d\gamma = 1$.

Опр. Рег. пов-ть: $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{U}$ откр $\subset \mathbb{R}^m$, $m < n$, и

$$m = \operatorname{rank} df = \operatorname{rank}\underbrace{\left(f_{u_1} \,\middle|\, f_{u_2} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, f_{u_m}\right)}_{\in Mat_{n,m}}, \text{ где } f_{u_j} = \frac{\partial f}{\partial u_j}$$

Пример 1) $t \in (0, 2\pi) \to (\cos t, \sin t)$



$\mathbb{R}^3 \supset H^2$

2) $H^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1\}$

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$$\begin{cases} x_0 = \cosh t \cdot \cos u \\ x_1 = \sinh t \cdot \cos u \\ x_2 = \sin u \end{cases}$$

Вопрос: всякое ли абстр. гл. мн-е $M \overset{F}{\cong} F(M) \subset \mathbb{R}^N$?

Теорема (слабая теорема Уитни) Всякое гладкое n-мн-е M с краем или без края можно гладко погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$ и гладко вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Док-во для замкнутого M, т.е. M — компактно и $\partial M = \emptyset$:

Шаг 1: $\exists$ вложение в $\mathbb{R}^N$ для дост. большого N.

Имеется конечный атлас карт (U_i, φ_i), $i = 1, \dots, k$. $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$. Возьмем открытое покрытие $\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i = M$, т.г. $\mathrm{clos}(V_i) \subset U_i$. Рассмотрим гладкую $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \equiv 1$ на V_i, $f \equiv 0$ вне U_i.

Имеем $\varphi_i(x) = (\varphi_{i,1}(x), \dots, \varphi_{i,n}(x))$. Положим $\psi_{i,j}(x) = f_i(x) \cdot \varphi_{i,j}(x)$ на U_i и $\psi_{i,j}(x) \equiv 0$ для $M \setminus U_i$ ($\varphi_{i,j}$ продолжили до $\psi_{i,j} : M \to \mathbb{R}$).

Покажем, что набор $(\psi_{i,j}, f_i)_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}$ задает вложение $F : M \to \mathbb{R}^{nk+k}$

Заметим, что ранг отобр $(\psi_{i,1}, \dots, \psi_{i,n})$ = рангу $\varphi_i = n$.

Данные ф-ции $\psi_{i,1}, \dots, \psi_{i,n}$ – координатные ф-ции $F \Rightarrow \mathrm{rk}\, F \geq n$.

Поскольку $\dim M = n \Rightarrow \mathrm{rk}\, F \leq n$ в каждой точке $x \in M \Rightarrow F$ - погр.

Остается показать, что F - инъективно. Пусть $x \neq y$, $x \in V_i$.

Тогда $f_i(x) = 1$. Если $f_i(y) \neq 1$, то $F(x) \neq F(y)$ (f_i - коорд. F).

Пусть $f_i(y) = 1$. Тогда $y \in V_i \Rightarrow \psi_i(x) = \varphi_i(x) \neq \varphi_i(y) = \psi_i(y)$.

След., $F(x) \neq F(y)$.

Шаг 2 (проецируем). Если $N \geq 2n+1$, то $\exists$ погр. в $\mathbb{R}^{N-1}$ и, след, в $\mathbb{R}^{2n}$

Докажем, что $\exists$ проекция $\pi : \mathbb{R}^N \to \underset{\text{гиперпл-ть}}{H \simeq \mathbb{R}^{N-1}} \subset \mathbb{R}^N$: $\pi|_{F(M)}$ - погр.

Отождествим M с $F(M)$; тогда $T_x M$ – $\underset{n\text{-мерная}}{\text{плоскость}}$ в $\mathbb{R}^N$.

Рассмотрим мн-во Ω пар (x, l), где $x \in M$, l - прямая в $T_x M \subset \mathbb{R}^N$. На прямую l можно смотреть как на точку из $\mathbb{RP}^{N-1}$.

Имеем отобр $\alpha : \Omega \to \mathbb{RP}^{N-1}$ - гл., $\dim \Omega = 2n-1$

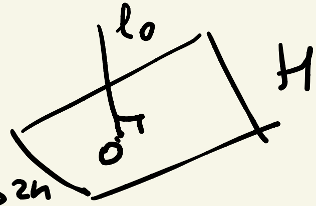
Заметим, что $\mathbb{RP}^{N-1} \setminus \alpha(\Omega) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, l_0 \in \mathbb{RP}^{N-1} \setminus \alpha(\Omega)$.

Образ $\alpha(\Omega)$ состоит из прямых в $\mathbb{R}^N$, параллельных одной прямой из T_xM хотя бы для одной т. $x \in M$. Следовательно, для всякой $x \in M$ кас. пр-во T_xM не содержит $l' \parallel l_0$.

Рассм. гиперпл-ть $H = \langle l_0 \rangle^{\perp} = \{ x \mid (x, e_0) = 0$, где $l_0 = \langle e_0 \rangle \}$ и ортогон. проекцию $\pi : \mathbb{R}^N \to H$ и $\tilde{\pi} = \pi|_M : M \to H$.

Заметим, что $d_x \tilde{\pi} : T_xM \to T_{\tilde{\pi}(x)} H$ — ортогон. проекция T_x на H.

$\ker(d\tilde{\pi})$ состоит из всех $l' \parallel l_0$, $l' \perp H$.



$\Rightarrow \ker(d_x \tilde{\pi}) = 0$ для всех $x \in M$.

$\Rightarrow \tilde{\pi} = \pi|_M : M \to H = \mathbb{R}^{N-1}$ — погруж.

Повторяя такой случай, получаем погруж. в $\mathbb{R}^{2n}$.

Шаг 3 Аналогично для вложений: если $N > 2n+1$, то $\exists$ вл. в $\mathbb{R}^{N-1}$.

Рассмотрим мн-во пар $G = \{ (x, y) \in M \times M \mid x \neq y \}$ и отобр $\beta: G \to \mathbb{R}P^{N-1}: (x,y) \mapsto \beta(x,y) \subset \mathbb{R}P^{N-1}$, прямая соедин. x и y.

Пусть $\ell \in \mathbb{R}P^{N-1}$ и $\pi_\ell: \mathbb{R}^N \to H_\ell = \langle \ell \rangle^\perp$ - ортогон. проекция.

Направл. ℓ запрещенное, если $\exists (x,y) \in G: \pi_\ell(x) = \pi_\ell(y)$.

Заметим, что мн-во запрещ. пар $= \beta(G)$; G - гл. мн-е, $\dim G = 2n$.

При $2n < N-1$ все точки G - крит. для гл. от. β.

След., по теор. Сарда $\mu(\beta(G)) = \mu(\alpha(\Omega)) = 0$ в $\mathbb{R}P^{N-1}$

$\Rightarrow$ их дополнение $\neq \varnothing$. Тогда ортогон. проектирование вдоль $\ell_0 \in \mathbb{R}P^{N-1} \setminus (\alpha(\Omega) \cup \beta(G))$ явл. погружением, не склеивающим точек $\Rightarrow$ вложением в H.

Далее мы можем спускаться до вложения в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Теор. (Сильная теор. Уитни) $\exists$ гладкое вложение $M \to \mathbb{R}^{2n}$.

2. Теорема Уитни об аппроксимации (непр. отобр. гомотопно гладкому)

Теор. (Уитни об аппрокс. ф-ций).
Пусть $F: M \to \mathbb{R}^k$ — непр. ф-ция. Тогда для всякой полож. ф-ции $\delta: M \to \mathbb{R}$ $\exists$ гладкая $\tilde{F}: M \to \mathbb{R}^k$, т.ч. $\tilde{F}$ — δ-близка к F, т.е. $|F(x) - \tilde{F}(x)| < \delta(x)$ $\forall x \in M$.

Опр. Пусть M вложено в $\mathbb{R}^N$, $n < N$. Норм. пр-во $N_x M$ — это $(N-n)$-мерное подпр-во в $\mathbb{R}^N$, сост. из векторов $\perp T_x M$.
Нормальное расслоение $NM = \{(x,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid x \in M,\ v \in N_x M\}$

Утв. Если $M \subset \mathbb{R}^N$ — вл. подмн, то NM — влож. N-dim подмн-е в $T\mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Опр. $M \subset \mathbb{R}^N$, то трубчатая окр-ть M — это дифф. образ мн-ва $V = \{(x,v) \in NM \mid |v| < \delta(x)\}$ при отобр. $E(x,v) = x + v$, где $E: NM \to \mathbb{R}^N$.

Теор. Всякое влож. подмн-е имеет трубч. окр-ть.

Теор (Уитни об аппрокс. непр. отобр.)
Всякое непр. отобр $F: M \to N$ гл. мн-ий гомотопно гладкому!

3. Трансверсальность.

Определения:

1) Пусть M – гл. мн-е. Тогда влож. подмн-я $S, S' \subseteq M$ пересек. трансверсально, если $\forall p \in S \cap S'$ имеем $T_pS + T_pS' = T_pM$.

2) Пусть $F: N \to M$ – гл. отобр, $S \subseteq M$ вл. подмн. Тогда F трансверсально подмн-ю S, если $\forall x \in F^{-1}(S)$:

$$T_{F(x)}M = T_{F(x)}S + d_xF(T_xN).$$

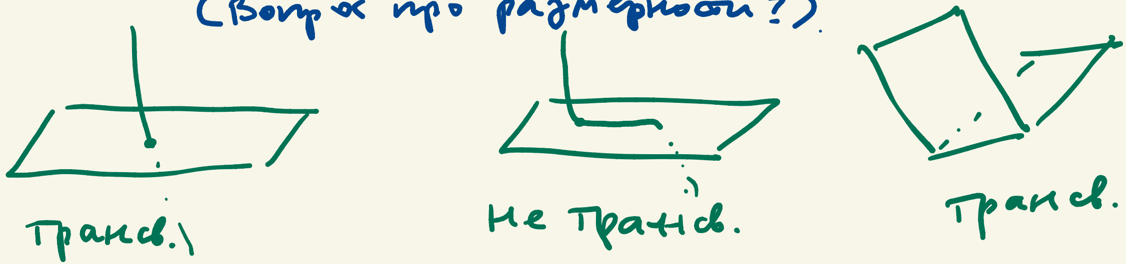
(Если F – субмерсия, то F автом. трансверс. всякому $S \subseteq M$).

Теор. (гомотопность трансверсальному отобр.)

Пусть $\underset{\text{гл.}}{F}: N \to M$, $S \subset M$ влож. Тогда $F \underset{\text{гомот.}}{\simeq} \tilde{F}$ – трансв. к S.

(Вопрос про размерности?)

Примеры



Литература

1. Натанзон "Введение Гладкие мн-я"
2. Прасолов " Комби- и диффф. топология".
3. Lee " Intro to Smooth Manifolds"
4. Книги Милнора
   - Т. Морса
   - дифф. топол
   - хар классы
5. Taubes (Таубс) - Diff Geom
6. Новиков - Тайманов
7. Guellemin Pollack - Diff Topol.