Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 3: субмерсии, погружения и вложения многообразий, подмногообразия, теоремы Сарда и Уитни, трансверсальность

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Субмерсии. Регулярные точки и регулярные значения гладких отображений.

Опр. $F: M \to N$ – гладкое отобр. Точка $p \in M$ – регулярна, если d_pF – сюръективен
$\dim M = m$, $\dim N = n$. Рег. точек $\nexists$ при $\dim M < \dim N$. $\operatorname{rank} d_pF = n$ при $m \geq n$.

Опр. $F: M \to N$ субмерсия, если все точки M регулярны.
Это возможно только при $m \geq n = \operatorname{rank} dF$ всюду на M.

Опр. Точка $q \in N$ наз. регул. значением для $F: M \to N$, если либо $q \in N \setminus F(M)$, либо все $p \in F^{-1}(q)$ явл. регулярными.

Теорема Пусть $F: M \to N$ – гладкое отобр., $S \subset N$ гладкое подмн-е, причем все точки $F^{-1}(S)$ регулярны. Тогда $F^{-1}(S)$ явл. гл. подмн-ем, $\dim F^{-1}(S) = \dim S + \dim M - \dim N$.

__Пример 1__ $F(x) = 1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$, $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$.
$dF = -2x_1 dx_1 - \ldots - 2x_n dx_n$, т.е. $\operatorname{Mat}(dF) = (-2x_1, \ldots, -2x_n)$.
Видно, что $d_xF: T_x\mathbb{R}^n \to T_{F(x)}\mathbb{R}^1$ – сюр $\Leftrightarrow d_xF \neq 0$.
Ясно, что $d_{F^{-1}(0)}F \neq 0$, т.к. $F^{-1}(0) = S^{n-1} = \{x \mid \sum x_j^2 = 1\}$, и $d_xF = 0 \Leftrightarrow x = (0, \ldots, 0)$.

Пример 2 Ортогональная группа $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \underset{\cong \mathbb{R}^{n^2}}{Mat_n(\mathbb{R})} \mid AA^T = E\}$.

Рассм. отобр. $F: \begin{array}{l} Mat_n(\mathbb{R}) \to Mat_n^+(\mathbb{R}) \\ X \mapsto XX^T \end{array}$ (пр-во симм. матриц — плоскость в $\mathbb{R}^{n^2}$)

Заметим, что $T_B Mat_n \cong Mat_n$; $T_{F(B)} Mat_n^+ \cong Mat_n^+$, $\forall B \in Mat_n$.

Докажем, что $F^{-1}(E) = O_n(\mathbb{R})$ — подмн-е в $\mathbb{R}^{n^2}$. Это следует из того, что E — рег. знач.

След., надо показать, что $\forall A \in F^{-1}(E)$ $d_A F$ — сюръект.

Пусть $V \in T_A Mat_n$. Тогда $d_A F(V) = d(XX^T)\Big|_{\substack{X=A \\ (dX = V)}} = dX \cdot X^T + X \cdot (dX)^T = VX^T + XV^T = \underline{\underline{VA^T + AV^T}}$

Более точно, $d_A F(V) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{F(A+tV) - F(A)}{t} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(A+tV)(A+tV)^T - AA^T}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cancel{AA^T} + tVA^T + tA\cdot V^T + t^2 VV^T - \cancel{AA^T}}{t} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} (VA^T + A^TV + t\cdot VV^T) = VA^T + AV^T$.

Заметим, что
$d_A F(V) = (VA^T) + (VA^T)^T$;
$\forall B \in Mat^+ \ \exists U: B = U + U^T$
Тогда $U = VA^T$; $V = U(A^T)^{-1}$

$d_A F(V)$ — сюръект на $O_n(\mathbb{R})$! $\Leftarrow$

Утв Рег. точки образуют откр. подмн-во.

2. Теорема Сарда

Теорема (Сард) Пусть $F: M \to N$ - гладкое отобр. Тогда множество критических значений F (т.е. мн-во точек вида $F(p)$, где p - не регулярная = критическая) имеет меру 0 в мн-ии N. ($\dim M \geq \dim N$)

Док-во: План: (1) Утв. сводится к отобр. $F: U \to \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ откр. область.

(2) Утв(1) доказывается индукцией по n.

Рассм. мн-во крит. точек $C \subset U \subset \mathbb{R}^m$. Надо док-ть, что $\underset{\mathbb{R}^n}{\mu}(F(C)) = 0$.

$$C_k := \left\{ x \in U \;\middle|\; \frac{\partial^{s \leq k} F}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}}(x) = 0 \right\}. \text{ Тогда}$$

$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ Остается доказать, что:

(3) $\mu(F(C \setminus C_1)) = 0$; (4) $\forall k \; \mu(F(C_k \setminus C_{k+1})) = 0$; и

(5) $\mu(F(C_k)) = 0$ при $k > \frac{m}{n} - 1$.

Док-во п.(3): если $n=1$, то $C = C_1$. Пусть $n > 1$. Представим мн-во B крит. значений в след. виде:

$$B \overset{\text{для индукции}}{=} \bigcup_t \left(\{t\} \times B_t\right),$$ где B_t - мн-во крит. зн-ий отобр. g_t от $m-1$ перем.

Пусть $x_0 \in C \setminus C_1$; $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$. М. сч., что $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$.

Рассм отобр. $h(x) = (F_1(x), x_2, \ldots, x_m)$, $h: U \to \mathbb{R}^m \supset V'$. Имеем

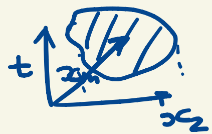
$$d_{x_0} h = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & * \ldots\ldots * \\ & 1 \quad 0 \\ 0 & \ddots \\ & 0 \quad 1 \end{pmatrix}$$ — невырожд, след. $h: V \to h(V) = V'$ - диффео для некот. обл $V \ni x_0$.

Положим $g := F \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^n$. Ясно, что $C_g = B = F(V \cap C)$.

При этом для $t = F_1(x)$ имеем $g(t, x_2, \ldots, x_m) = F \circ h^{-1}(t, x_2, \ldots, x_m) =$
$$= F(x_1, \ldots, x_m) = (t, F_2(x), \ldots, F_n(x)).$$

Положим $g_t(x_2, \ldots, x_m) = (F_2(x), \ldots, F_n(x))$, т.е. $g(t, x_2, \ldots, x_m) = (t, g_t(x_2, \ldots, x_m))$.

$$g_t : V' \cap \underset{\langle x_2, \ldots, x_m \rangle}{\mathbb{R}^{m-1}} \to \mathbb{R}^{n-1}.$$



Имеем:

$$J(g(t, x_2, \ldots, x_m)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \frac{\partial g_t}{\partial x} \\ \vdots & \\ * & \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что $\overset{\text{мн-во крит. точек}}{C_{g(t,x_2,\dots,x_m)}} = \bigcup\limits_t (\{t\}\times \underset{g_t(x_2,\dots,x_m)}{C_{g_t}})$.

Тогда $B = \bigcup\limits_t F(t, C_{g_t}) = \bigcup\limits_t \underset{\{t\}\times B_t}{(\{t\}, B_t)}$, где $B_t := g_t(C_{g_t})$ – мн-во крит. зн-ий g_t.

По пр-по индукции $(n-1)$-мерная мера B_t равна 0, след.

$$\mu(F(V\cap C)) = \mu(B) = \mu(\bigcup\limits_t \{t\}\times B_t) = 0.$$

Док-во п. 4): в $x_0 \in C_k \setminus C_{k+1}$ имеем $\dfrac{\partial^{k+1}F_1}{\partial x_1 \partial x_{s_2}\dots\partial x_{s_{k+1}}}(x_0) \neq 0$.

Пусть $w(x) = \dfrac{\partial^k F}{\partial x_{s_2}\dots\partial x_{s_{k+1}}}$; $w(x_0) = 0$, $\dfrac{\partial w}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$.

Аналогично строим h и $g = F\circ h^{-1}$:

$h: U \to \mathbb{R}^m$, где $h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_m)$,

$$d_{x_0}h = \left(\begin{array}{c|c} \partial w/\partial x_1 & * \dots * \\ \hline 0 & E \end{array}\right) \Rightarrow \exists \underset{x_0}{\overset{\Downarrow}{V}} \cong V' = h(V) \subset \mathbb{R}^m.$$

Если $x \in C_k$, то $h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_m) = (0, x_2, \dots, x_m)$.

Отсюда следует, что

что $F(C_k \cap V) = g h(C_k \cap V) = g_0 h(C_k \cap V)$, где $h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_m)$

$g_0 = g|_{(0,\mathbb{R}^{m-1})} : (0, \mathbb{R}^{m-1}) \cap h(V) \to \mathbb{R}^n$

Поскольку $F = g_0 h$ на $C_k \cap V$, то $\left.\frac{\partial^{\le k} g_0}{\partial x \dots}\right|_{h(C_k \cap V)} = 0$.

Тогда все точки $g_0 h(C_k \cap V)$ — крит. знач. g_0.

Но g_0 завис. от $m-1$ пер-х, след. $\mu_{n-1}(F(C_k \cap V)) = \mu_{n-1}(g_0 h(C_k \cap V)) = 0$.

<u>Док-во п.5</u>: $\forall k > \frac{m}{n} - 1$ $\mu(F(C_k)) = 0$; пусть $I(x,\delta)$ — замкн. куб с ц. x и ребром δ.

В точке $x \in C_k$: $\exists \delta > 0$ т.ч.

$\|F(x+h) - F(x)\| \le c \cdot \|h\|^{k+1}$, где $x \in C_k \cap I(x,\delta)$, $x + h \in I(x,\delta)$

Разобьем $I(x,\delta)$ на r^m кубиков с ребром δ/r. Для всякого $y \in C_k \cap I(x,\delta)$ $\exists$ куб I_y из разбиения, сод. y.

Тогда точка куба $I_y \subset$ мн-ве точек вида $y + h$, где $\|h\| < \sqrt{m}(\delta/r)$

подсчет диагонали!

Имеем: $F(I_y) \subset \mathbb{R}^n$ содерж. в кубе с ц. $F(y)$ и ребром длины $\leq c \cdot \|h\|^{k+1} \leq c\left(\sqrt{m}\ \delta/r\right)^{k+1} = a/r^{k+1}$, где

$a = c(\sqrt{m}\,\delta)^{k+1}$.

Таким образом

$F(C_k \cap I(x,\delta)) \subset \bigcup F(I_y)$, откуда следует

$\mu(F(C_k \cap I(x,\delta))) \leq r^m a^n / r^{(k+1)n} =$

$= a^n r^{m-(k+1)n} \leq a^n r^{-\gamma n}$

где $\gamma = k+1 - \frac{m}{n} > 0$

$k > \frac{m}{n} - 1$

$k+1 > \frac{m}{n}$

0 при $r \to \infty$. $\Rightarrow \mu(F(C_k \cap I(x,\delta))) = 0$.

$\Downarrow$

$\mu(F(C_k)) = 0$ (через покрытие счетным числом кубов)

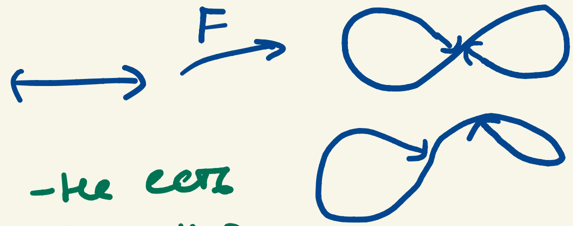
3. Слабая теорема Уитни о вложении и погружении.

Напомним, что $F : M \to N$ ($\in C^\infty$) — погруж, если d_pF — инъект $\forall p \in M$.

$\operatorname{rank} d_pF = \dim M \le \dim N$.

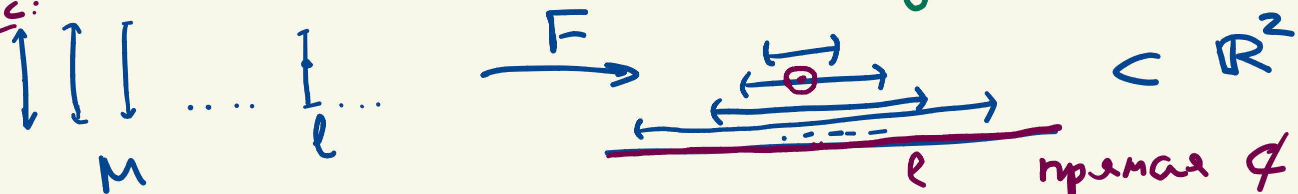
F — вложение, если F — погр $+$ $M \cong F(M)$.

Примеры 1) Погр (1–1), но не влож:



2) $F : M \to N$ влож, но $F(M) \subset N$ — не есть подмн-е.

Вопрос:



прямая $\not\subset F(M)$

Вопрос: Будет ли $\tilde{M} = F(M) \cup \ell$ — подмн-е в $\mathbb{R}^2$?

$U \subset \mathbb{R}^d$ — подмн-е, если $\forall x \in U$ $\exists$ окр-ть, в которой
$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ u_d = \varphi_d(x_1, \ldots, x_m) \end{cases}$$
с J max ранга

Регулярные кривые и поверхности

Опр $t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ – на. регул. кривая, если $\|\gamma'(t)\| \neq 0$.

$\gamma : \mathbb{R}^1 \to \gamma(\mathbb{R}^1) \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ – погруж. т.к.

регул.

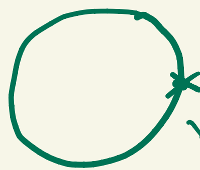
$d\gamma$ – сюр. $\qquad$ rank $d\gamma = 1$.

Опр. Рег. пов-ть: $f : \underset{\text{откр}}{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, где $m < n$, и

$$m = \operatorname{rank} df = \operatorname{rank} \left(f_{u_1} \,\middle|\, f_{u_2} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, f_{u_m} \right), \text{ где } f_{u_j} = \frac{\partial f}{\partial u_j}$$

$$\ni \mathrm{Mat}_{n,m}$$

Пример 1) $t \in (0, 2\pi) \to (\cos t, \sin t)$



$\mathbb{R}^3 \supset H^2$

2) $H^2 = \{ (x_0, x_1, x_2) \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1 \}$

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$$\begin{cases} x_0 = \cosh t \cdot \cos u \\ x_1 = \sinh t \cdot \cos u \\ x_2 = \sin u \end{cases}$$

Вопрос: всякое ли абстр. гл. мн-е $M \overset{F}{\cong} F(M) \subset \mathbb{R}^N$?

Теорема (слабая теорема Уитни) Всякое гладкое n-мн-е M с краем или без края можно гладко погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$ и гладко вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Док-во для замкнутого M, т.е. M — компактно и $\partial M = \varnothing$:

Литература

1. Натанзон "Введение Гладкие мн-я"
2. Прасолов "Комби- и дифф. топология"
3. Lee "Intro to Smooth Manifolds"
4. Книги Милнора
   - Т. Морса
   - дифф. топол
   - хар классы
5. Taubes (Таубс) – Diff Geom
6. Новиков – Тайманов
7. Guellemin Pollack – Diff Topol.