Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 2: субмерсии, погружения и вложения многообразий, подмногообразия, ориентация, край, теоремы Сарда и Уитни, трансверсальность

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Напоминание. Касательное пространство. Гладкие отображения. Погружения и вложения.

Опр. $f: M \to N$ – гладкое отобр. гладких мн-ий ($f \in C^\infty(M,N)$), если оно гладкое в картах:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_U"'] & N \arrow[d, "\psi_V"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "\tilde{f}"] & \psi(V) \end{tikzcd}$$

$\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ – гладкое $\tilde{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Опр. Гладкая кривая в M – это гладкое отобр. $\gamma: \mathbb{R}^1 \to M$.

Опр. (Касат. пр-во к M в точке x) $:= T_xM$ – семейство классов эквивалентности векторов скоростей кривых $\gamma \ni x$.

Заметим, что $\dim T_xM = n$ для всех $x \in M$. Если $f: M \to N$ – гл. отобр., то $d_x f: T_xM \to T_{f(x)}N$ – лин. отобр. касат. пр-в.

Опр. $f: M \to N$ – погружение (иммерсия), если f – гладкое и $d_x f$ – инъекция $\forall x \in M$.

$\operatorname{rank} d_x f = \dim M$

$f: M \to N$ – вложение, если f – погружение и $M \approx f(M)$.

Если f – вложение, то $f(M) \overset{\text{diffeo}}{\cong} M$.

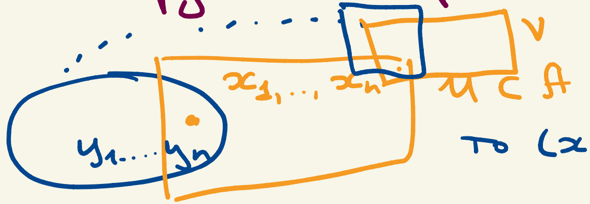
2. Ориентируемые многообразия. Ориентация на крае.

Опр. Многообразие M с атласом $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ориентировано, ф-ции склейки имеют полож. якобиан (т.е. $\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) > 0$, где x, y — лок. коорд. на картах U_x, U_y)

Мн-е M ориентируемо, если можно на нем выбрать ориентированный атлас.

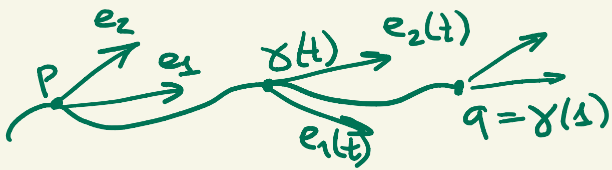
Лемма Пусть M — ориентируемо, и $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — произв. атлас, соглас. с гладкой стр-рой на M. Тогда $\mathcal{A}$ можно ориентировать путем замены лок. коорд. в некоторых картах.

Идея док-ва: карта из ориент. атл. →



Если $\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) < 0$, то $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Перенос ориентации вдоль $\gamma(t)$:



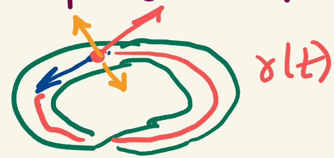
Непр. отобр. $t \mapsto (e_1(t), e_2(t))$, где $\pi \circ e_j = \gamma$ для $\pi: TM \to M$ (см. ниже)

проекция касат. расслоения

Ясно, что $\det(e_1,\dots,e_n)$ и $\det(e_1(t),\dots,e_n(t))$ имеют одинаковые знаки. Таким образом, мы переносим ориентацию из т. $p\in M$ в $q\in M$ ($T_pM \to T_qM$). Она не зависит от семейства $(e_1(t),\dots,e_n(t))$. Т.е. если $(\tilde e_1(t),\dots,\tilde e_n(t))$ – другое такое сем-во, что $\tilde e_1(0)=e_1,\dots,\tilde e_n(0)=e_n$, то $\det(\tilde e_1(t),\dots,\tilde e_n(t))$ и $\det(e_1(t),\dots,e_n(t))$ имеют один знак.

Теорема Связное мн-е M ориентируемо, если для всякой $p\in M$ ориентация, перенесенная в $q\in M$, не зависит от выбора кривой $\gamma:[0,1]\to M$ (где $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=q$).

Пример 1) Лента Мебиуса Mb – неориент:



2) S^n – ориентируемо

наслед. из $\overline{B^{n+1}}$ (и из $\mathbb{R}^{n+1}$).

3) $\mathbb{R}P^n$ – неориент при $n=2m$

ориент. при $n=2m+1$.

Идея: перенести репер. по экватору сферы, а также под действием $x\mapsto -x$

Предл Если M – ориент, то ∂M – тоже ор.

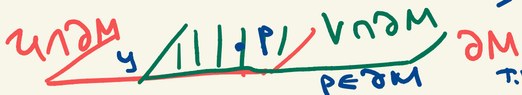
Док-во:

$$\det\left(\frac{\partial \bar y}{\partial \bar x}\right)=\det\begin{pmatrix} \partial y/\partial x & \vdots \\ 0 & \cdot \end{pmatrix} \to \partial y_n/\partial x_n (p) > 0.$$

$\bar y=(y, y_n)$

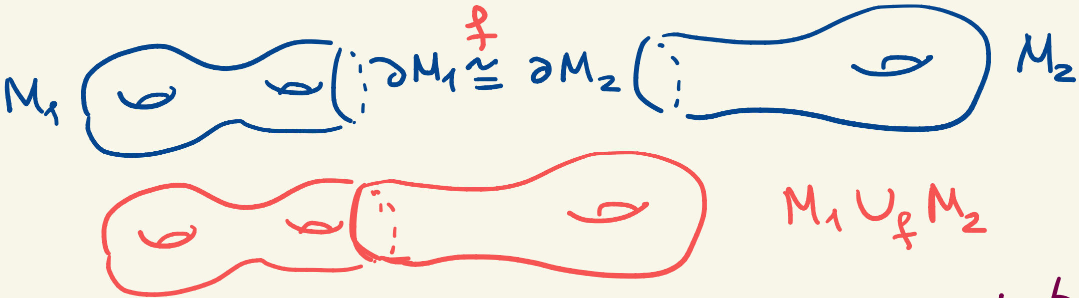
$\bar x=(x, x_n)$

т.к. $y_n, x_n \geq 0$ Упр

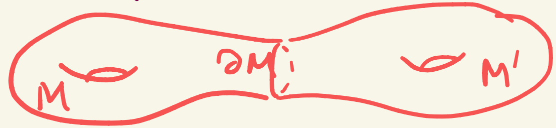


3. Приаттачивание по границе. Гладкий дубль. Связная сумма (без док-ва)

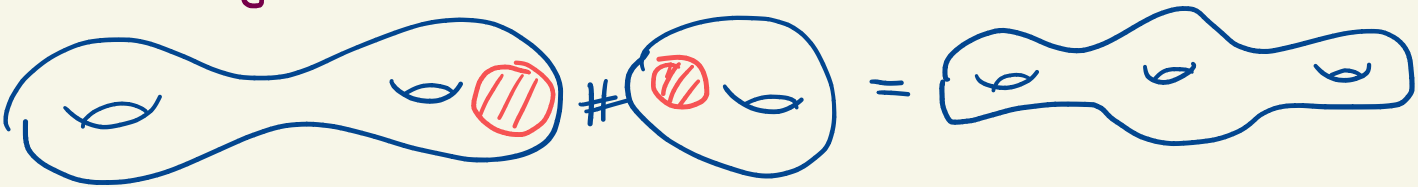
Теорема Пусть M_1 и M_2 — два гладких n-мн-я с краем, причем $\partial M_1 \overset{\text{diffeo}}{\underset{f}{\cong}} \partial M_2$. Тогда $M_1 \cup_f M_2$ — гладкое мн-е без края.



Теорема Пусть M — мн-е с краем. Тогда $M \cup_{id} M' = \begin{pmatrix}\text{дубль } M \\ \text{вдоль } \partial M\end{pmatrix} =$ гладкое мн-е без края.



Теорема Пусть M_1, M_2 — два гладких мн-я. Тогда $M_1 \# M_2$ — тоже гл. мн-е.



4. Касательное расслоение

Опр. Касательное расслоение $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$

Предл. TM – гладкое $2n$-многообразие

Док-во: $\forall v \in TM \ \exists!\, p: v \in T_pM$. Зададим таким образом отобр. $\pi: TM \to M$, $\pi(v) = p$. Ясно, что $\pi^{-1}(p) = T_pM$. Пусть (U, φ) – карта на M, где $p \in U$. Тогда $TU = \pi^{-1}(U)$.

Построим отобр. $\Phi: TU \to \mathbb{R}^{2n}$ след. обр.: $\Phi(v) = (p, v)$, где $p = (p_1, \dots, p_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in T_pU$.

1) Если $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ - атлас на M, то (TU_α, Φ_α) - атлас на TM.

2) (TU_1, Φ_1) и (TU_2, Φ_2) - две карты, то лок. коорд. гладко выражаются друг через друга:

$$u_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \cdot v_j \ ; \quad y_j = y_j(x_1, \dots, x_n)$$

$(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$ на TU_1

$(y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_n)$ на TU_2.

На TM надо правильно определить топологию!

А именно: $A \subset TM$ открыто, если $\Phi(A \cap TU) \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ для всякого $U \subset M$.

В этом случае $\Phi^{-1}(W)$ открыт в TM для всякого открытого $W \subset \mathbb{R}^{2n}$. Отсюда след., что Φ – гомеоморфизм. $\boxtimes$

Опр. Кокасательное расслоение: $T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$

Единичное касательное расслоение:

$T^1M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^1 M$, где $T_p^1 M$ – семейство единичных касат. векторов $\|v\| = 1$.

Заметим, что $\dim T^1 M = 2n-1$, где $\dim M = n$.

5. Субмерсии. Регулярные точки и регулярные значения гладких отображений.

Опр. $F: M \to N$ — гладкое отобр. Точка $p \in M$ — регулярна, если d_pF — сюръективен $\Leftrightarrow$ при $m \geq n$ $\operatorname{rank} d_pF = n$.

$\dim M = m$
$\dim N = n$

Рег. точек $\nexists$ при $\dim M < \dim N$.

Опр. $F: M \to N$ субмерсия, если все точки M регулярны.

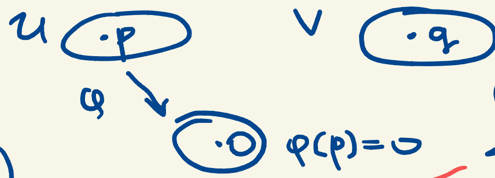
Это возможно только при $m \geq n = \operatorname{rank} dF$ всюду на M.

Опр. Точка $q \in N$ наз. регул. значением для $F: M \to N$, если либо $q \in N \setminus F(M)$, либо все $p \in F^{-1}(q)$ явл. регулярными.

Теорема Пусть $F: M \to N$ — гладкое отобр., $S \subset N$ гладкое подмн-е, причем все точки $F^{-1}(S)$ регулярны. Тогда $F^{-1}(S)$ явл. гл. подмн-ем, $\dim F^{-1}(S) = \dim S + \dim M - \dim N$.

Док-во: 1) Пусть $S = \{q\}$, т.е. $\dim S = 0$, и пусть $F(p) = q$.

Тогда $F^{-1}(q)^\circ$ — непустое мн-во уровня, т.к.



$\varphi(p) = 0$

$F^{-1}(q)^\circ = \{x \in \varphi(U) \mid F(x) = 0\}$, причем

по условию $F = (F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_n(x_1, \dots, x_m))$.

$\dim F^{-1}(q) = m - n$

$$\begin{cases} F_1(x_1 \dots x_m) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

$\operatorname{rank} dF = n \leq m$.

2) Если $\dim S > 0$, то на самом деле идея примерно такая же. В подход. картах и лок. координатах

$$F: \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{(x}}, \underset{\mathbb{R}^{m-n}}{\underset{\cap}{y)}} = (\underset{\mathbb{R}^s}{\underset{\cap}{u}}, \underset{\mathbb{R}^{n-s}}{\underset{\cap}{v}}, \underset{\mathbb{R}^{m-n}}{\underset{\cap}{y}}) \longrightarrow (u, v).$$

При этом само S зад. локально системой $v = 0$ ($n-s$ ур-й)

$$\dim F^{-1}(S) = m - (n-s) = m+s-n. \quad \boxtimes$$

Предл. 1) M - мн-е с краем $\partial M \neq \emptyset$, тогда $\exists$ boundary defining function, опред-ая границу ф-ция

т.е. гл. ф-ция $F: M \to \mathbb{R}$ т.ч. $M = \{x \mid F(x) \geq 0\}$ и

(без док-ва) $dF|_{\partial M} \neq 0$, где $\partial M = \{x \mid F(x) = 0\}$. (т.е. м. сч., что $F: M \to [0, +\infty)$)

Идея: На $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ $f_\alpha(x) = x_n$ далее через разб. 1: $f(x) = \sum_\alpha f_\alpha \circ \varphi_\alpha$

2) Пусть $F: N \to \mathbb{R}$ – гладкое отобр, $\partial N = \emptyset$, 0 – регул. знач.

Тогда $F^{-1}([0, +\infty))$ – мн-е с краем $\partial M = F^{-1}(0)$.

Пример: $\overline{B}^n = F^{-1}([0, +\infty))$, где $F(x) = 1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$.

Тогда $\partial \overline{B}^n = S^{n-1} = F^{-1}(0) = \{x \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$.

6. Теорема Сарда

Теорема (Сард) Пусть $F: M \to N$ – гладкое отобр. Тогда множество критических значений F (т.е. мн-во точек вида $F(p)$, где p – не регулярная = критическая) имеет меру 0 в мн-ии N.

Док-во: План: (1) Утв. сводится к отобр. $F: U \to \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ откр. область.

(2) Утв(1) доказывается индукцией по n.

Рассм. мн-во крит. точек $C \subset U \subset \mathbb{R}^m$. Надо док-ть, что $\mu(F(C)) = 0$ (μ в $\mathbb{R}^n$).

$$C_k := \left\{ x \in U \;\middle|\; \frac{\partial^{s \le k} F}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_s}}(x) = 0 \right\}.$$

Тогда $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$. Остается доказать, что:

(3) $\mu(F(C \setminus C_1)) = 0$; (4) $\forall k \;\; \mu(F(C_k \setminus C_{k+1})) = 0$; и

(5) $\mu(F(C_k)) = 0$ при $k > \frac{m}{n} - 1$.

Док-во п.(3): если $n = 1$, то $C = C_1$. Пусть $n > 1$. Представим мн-во B крит. значений в след. виде:

$$B = \bigcup_t (t \times B_t),$$ где B_t – мн-во крит. зн-ий отобр. g_t от $m-1$ перем.

Пусть $x_0 \in C \setminus C_1$; $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$. М. сч., что $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$.

Рассм отобр. $h(x) = (F_1(x), x_2, \dots, x_m)$, $h: U \to \mathbb{R}^m$. Имеем

$$d_{x_0} h = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & * \dots * \\ 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$ – невырожд, след. $h: V \to \overset{V'}{\overset{\shortparallel}{h(V)}}$ – диффео для некот. обл $V \ni x_0$.

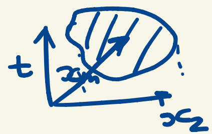
Положим $g := F \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^n$. Ясно, что $C_g = B = F(V \cap C)$.

При этом для $t = F_1(x)$ имеем $g(t, x_2, .., x_m) = F \circ h^{-1}(t, x_2, .., x_m) =$

$$= F(x_1, \dots, x_m) = (t, F_2(x), \dots, F_n(x)).$$

Положим $g_t(x_2, .., x_m) = (F_2(x), .., F_n(x))$, т.е. $g(t, x_2, .., x_m) = (t, g_t(x_2, \dots x_m))$.

$$g_t : V' \cap \underset{\langle x_2, \dots x_m \rangle}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}^{m-1}}} \to \mathbb{R}^{n-1}.$$



Имеем:

$$J(g(t, x_2, .., x_m)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \frac{\partial g_t}{\partial x} \\ \vdots & \\ * & \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что $\overset{\text{мн-во крит. точек}}{C_{g(t,x_2,\dots,x_m)}} = \bigcup\limits_t (t \times C_{g_t})$. $\quad g_t(x_2,\dots,x_m)$

Тогда $B = \bigcup\limits_t F(t, C_{g_t}) = \bigcup\limits_t (t, B_t)$, где $B_t := g_t(C_{g_t})$ – мн-во крит. зн-ий g_t.

По пр-ю индукции $(n-1)$-мерная мера B_t равна 0, след.

$$\mu(F(V\cap C)) = \mu(B) = \mu\Big(\bigcup_t t\times B_t\Big) = 0.$$

<u>Док-во п. 4)</u>: в $x_0 \in C_k \setminus C_{k+1}$ имеем $\dfrac{\partial^{k+1} F_1}{\partial x_1 \partial x_{s_2}\dots \partial x_{s_{k+1}}}(x_0) \neq 0$.

Пусть $w(x) = \dfrac{\partial^k F}{\partial x_{s_2}\dots\partial x_{s_{k+1}}}$; $w(x_0) = 0$, $\dfrac{\partial w}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$.

Аналогично строим h и $g = F\circ h^{-1}$. Тогда можно док-ть, что $F(C_k \cap V) = gh|C_k \cap V) = g_0 h(C_k \cap V)$, где $h(x) = (w(x), x_2 \dots x_m)$

$$g_0 = g|_{(0,\mathbb{R}^{m-1})} : (0, \mathbb{R}^{m-1}) \cap h(V) \to \mathbb{R}^n$$

Поскольку $F = g_0 h$ на $C_k \cap V$, то $\left.\dfrac{\partial^{\le k} g_0}{\partial x}\right|_{h(C_k\cap V)} = 0$.

Тогда все точки $g_0 h(C_k \cap V)$ – крит. знач. g_0.

Но g_0 завис. от $m-1$ пер-х, след. $\mu_{n-1}(F(C_k \cap V)) = \mu_{n-1}(g_0 h(C_k \cap V)) = 0$.

ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ!

7. Слабая теорема Уитни о вложении и погружении.

Вопрос: всякое ли абстр. гл. мн-е $M \overset{F}{\cong} F(M) \subset \mathbb{R}^N$? диффео

Теорема (слабая теорема Уитни) Всякое гладкое n-мн-е M с краем или без края можно гладко погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$ и гладко вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Док-во для замкнутого M, т.е. M — компактно и $\partial M = \emptyset$:

8. Теорема Уитни об аппроксимации (непр. отобр. гомотопно гладкому)

$F: M \to N$ — непр. отобр. C^∞ мн-ий гомотопно гладкому.