Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 13: риманова метрика и римановы многообразия, геодезические, изометрии и движения, локальные изометрии и накрытия

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Риманова метрика и римановы многообразия

Опр. Риманова метрика на гладком многообр. M — это положит. опред. симм. тензорное 2-поле, т.е. это тензор $g = \sum_{i,j} g_{ij}(x)\, dx_i \otimes dx_j$, где $g_{ij} = g_{ji}$, и матрица

матрица Грама

$(g_{ij}) = G > 0$ (полож. опр., т.е. $(Gv, v) > 0 \ \forall v \neq 0$)

(т.е. тензор g применяется к парам векторов (u, v) из T_pM)

Метрический тензор g — это по сути сечение симметрич. квадрата кокасат. расслоения $S^2(T^*M)$, т. ~~что~~ $g_p > 0$ во всех $p \in M$.

То есть это симм. билин. форма g_{ij}, положит. опред., живущая в каждом слое T_pM и гладко завис. от $p \in M$.

Опр Риманово многообразие (M, g) — это мн-е M, снабженное рим. метрикой g.

Пример 1) $\mathbb{R}^n$ с риман. метрикой $g = dx_1 \otimes dx_1 + \ldots + dx_n \otimes dx_n$.

(еще можно встретить обознач. $ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$.

это соотв. стандартной евклид. метрике.

2) Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмн-е. Тогда T_pM — это m-мерная пл-ть в $\mathbb{R}^n$. Мы можем ограничить
$\dim M = m$

евкл. скал. умн-е $(\cdot, \cdot)$ на T_pM, где $p \in M$.

Таким образом, мы получим индуцированную с $\mathbb{R}^n$ риманову метрику на M.

Зачем нужна риманова метрика?

– Можем считать углы между касат. векторами (и кривыми):

$$\cos \angle(u,v) = \frac{g_p(u,v)}{\sqrt{g_p(u,u)\cdot g_p(v,v)}}, \text{ где } u,v \in T_pM.$$

– Длины векторов $\|v\| = \sqrt{g_p(v,v)}$, где $v \in T_pM$.

(Т.е. риманова метрика – это аналог скал. произведения для касат. векторов)

– Длины кривых $\gamma(t)$: $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))}$

Тогда $L(\gamma)\big|_{t\in[a,b]} = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.$

– Можем вычислять объемы. Определим форму объема: $\mathrm{vol}_g = \mathrm{vol}_M = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^n(M)$.

где $n = \dim M$.

Тогда для $U \subset M$ $\mathrm{vol}(U) = \int_U \mathrm{vol}_g$.

Заметим, что стандартный базис $\frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}$ ортонормирован для мн-ия $\mathbb{R}^n$, так что риманов объем для $\mathbb{R}^n$ совпадает со станд. объемом, т.к. $G = (g_{ij}) = E$.

Естеств. вопрос: почему $\exists$ риманова метрика на M и сколько их?

Теор. Всякое гладкое мн-е M допускает риманову метрику. (и их может быть бескон. много)

Док-во: Существование можно доказывать 2-мя способами.

I сп: по теор Уитни $\exists$ вложение $F: M \to \mathbb{R}^N$, далее индуц. метрику с $\mathbb{R}^N$ на $F(M)$, затем с помощью диффео $F: M \to F(M)$ переносим на M.

II сп. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ – атлас на M. В каждой карте U_α положим $g_\alpha = \varphi_\alpha^* \cdot g_E$, где g_E – евкл. метр. в $\mathbb{R}^n$.

(т.е. g_α в лок. коорд. имеет вид $g_\alpha = \sum_{i,j} \delta_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$

$= dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$.

Пусть h_α — разб. 1, подч. атласу $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$,

тогда $g = \sum\limits_\alpha h_\alpha g_\alpha$, т.е.

$g_p(u,v) = \sum\limits_\alpha h_\alpha \, g_\alpha|_p (u,v)$, где $\forall p, v \neq 0 \in T_pM$
$g_p(v,v) > 0$. $\boxtimes$

Пример: 1) Рассмотрим верхнюю полупл-ть $U^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. На U^2 сущ. обычная евкл. метрика $g_U = dx \otimes dx + dy \otimes dy = dx^2 + dy^2$, т.е. если $v = (v_1, v_2) \in T_p U^2$, то $g_E(v,v) = v_1^2 + v_2^2$.

$\left(v = v_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Но есть и другая — гиперболическая — метрика на U^2:

$$g_u := \frac{dx\otimes dx + dy\otimes dy}{y^2}.$$

Опр. Рим. мн-ие (U^2, g_u) — модель пл-ти Лобачевского H^2 (еще можно встретить обозн: L^2; Λ^2) в модели верхней полупл-ти.

2. Примеры римановых метрик: I квадр. форма.

Пусть $f : \underset{u_1 \dots u_m}{U} \overset{\subset \mathbb{R}^m}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$ — рег. гл. пов-ть, $m < n$.

Напр., $f(U) = M \subset \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$.

Тогда известно, что векторы $f_{u_j} = \frac{\partial f}{\partial u_j}$ образуют

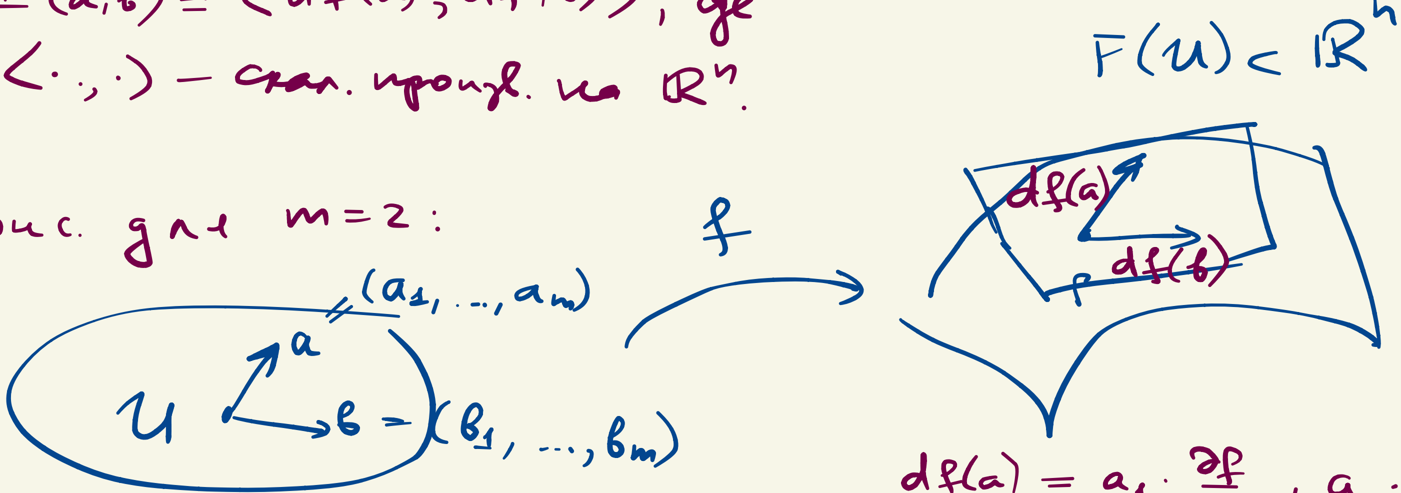
Базис пр-ва T_pM (пл-ть в $\mathbb{R}^n$).

Индуцируем скал. произв. с $\mathbb{R}^n$ на T_pM след. обр.:

$I(a,b) = \langle df(a), df(b) \rangle$, где

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скал. произв. на $\mathbb{R}^n$.

рис. для $m=2$:



$$df(a) = a_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u_1} + a_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u_2}$$

Заметим, что

$$I(a,b) = a^t G b = (a_1 \ldots a_m)\, G \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ где } G = \mathrm{Gram}(f_{u_1}, \ldots, f_{u_m}).$$

т.е. $\mathrm{Mat}(I) = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \rangle & \dots & \langle \frac{\partial f}{\partial u_m}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \\ & \dots & \langle \frac{\partial f}{\partial u_m}, \frac{\partial f}{\partial u_m} \rangle \end{pmatrix}$

$I(x, x)$ — I квадр. форма пов-ти $f(U) = M \subset \mathbb{R}^n$.

Пример: $S^2 \subset \mathbb{R}^3$; $f: U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

$$f(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} f_1(u_1, u_2) \\ f_2(u_1, u_2) \\ f_3(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u_1 \cdot \cos u_2 \\ \cos u_1 \cdot \sin u_2 \\ \sin u_1 \end{pmatrix}$$

$$f_{u_1} = (-\sin u_1 \cdot \cos u_2, \ -\sin u_1 \cdot \sin u_2, \ \cos u_1)$$

$$f_{u_2} = (-\cos u_1 \cdot \sin u_2, \ \cos u_1 \cdot \cos u_2, \ 0)$$

Тогда $G = \mathrm{Mat}(I) = \mathrm{Mat}(g_{S^2}) =$

$$= \begin{pmatrix} \langle f_{u_1}, f_{u_1} \rangle & \langle f_{u_1}, f_{u_2} \rangle \\ \langle f_{u_1}, f_{u_2} \rangle & \langle f_{u_2}, f_{u_2} \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \sin^2 u_1 (\cos^2 u_2 + \sin^2 u_2) + \cos^2 u_1 & \begin{array}{c} \sin u_1 \cos u_1 \sin u_2 \cos u_2 - \\ '' - \sin u_1 \cos u_1 \sin u_2 \cos u_2 \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & \cos^2 u_1 (\sin^2 u_2 + \cos^2 u_2) \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u_1 \end{pmatrix}$$ — матрица Грама римановой метрики на сфере S^2, индуц. из $\mathbb{R}^3$.

Например, для $a = (a_1, a_2) \in T_{p}S^2$, где $p = (p_1, p_2)$,

имеем $\|a\| = \sqrt{g_{S^2}(a,a)} = a_1^2 + \cos^2 p_1 \cdot a_2^2$.

$$\cos \angle(a,b) = \frac{g_{S^2}(a,b)}{\|a\| \cdot \|b\|} = \ldots$$

3. Расстояние (метрика) и геодезические.

Пусть (M, g) — связное рим. мн-е.

Опр. Расст. $\rho(p,q)$ между точками p и q на рим. мн-ии M опред. след. обр.:

$$\rho(p,q) = \inf_{\gamma} L(\gamma)\Big|_{[0,1]}, \text{ где } \gamma:[0,1]\to M,\ \gamma(0)=p,\ \gamma(1)=q.$$

<u>Предл.</u> (без док-ва) (M,ρ) — метрич. пр-во.

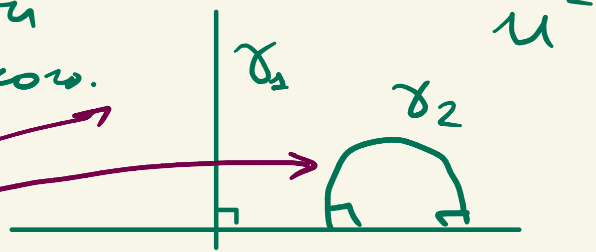
<u>Опр.</u> <u>Геодезическая</u> на M — это кривая $\gamma: I \overset{\text{инт.}}{\subset} \mathbb{R} \longrightarrow M$, где $\|\gamma'(t)\| \equiv \mathrm{const} = k$, и при этом γ локально реализует расст., т.е.

$$\forall t \in I\ \exists [t_0,t_1] \ni t:\ \rho(\gamma(t_0),\gamma(t_1)) = L(\gamma)\Big|_{[t_0,t_1]} = k(t_1-t_0).$$

Примеры 1) (E^n, g_E): геодезические = аффинные прямые

2) $(S^n; g_{S^n})$, где S^n – 1-сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$, геодезичес-кими яв-ся дуги "больших" окр-тей, которые суть сечения S^n 2-мерными пл-тями, проход. через центр сферы.

3). $(\mathcal{U}^2, g_\mathcal{U})$ – модель пл-ти Лобачевского.



Геодезические

4. Полные рим. мн-я

Опр 1.
Метрическое пр-во (M, ρ) наз. полным, если всякая посл-ть Коши сход. в M.
Заметим, что если M - полно, то $M \setminus \{pt\}$ не полно.

Опр 2. Рим. мн-е (M, g) геодезически полно, если всякая геодезическая $\gamma : I \to M$ может быть продолжена до геодезической $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to M$, т.ч. $\tilde{\gamma}|_I = \gamma$.

Теор. (Хопф, Ринов).

Пусть (M,g) — связное рим. мн-ие.

Тогда сл. усл. экв.:

1) (M,ρ) — полное метр. пр-во.

2) (M,g) — геодез. полно.

3) $K \subset M$ — компакт $\Longleftrightarrow$ K замкн. и огран. в M.

В случае, если M полно, то $\forall p \neq q$ $\exists$ геод. γ, на которой расст. достигается: $\rho(p,q) = L(\gamma)\big|_{[\gamma^{-1}(p),\gamma^{-1}(q)]}$

5. Изометрии и лок. изометрии

Опр Пусть (M, g) и (N, h) - рим. мн-ия. Тогда диффеоморфизм $f: M \to N$ назыв. изометрией, если $g(u,v) = h(df_p(u), df_p(v))$ для произв. т. $p \in M$ и $u, v \in T_pM$.

Теор. Пусть $f, g: M \to N$ - изометрии св. рим. мн-ий.
Если $\exists p \in M$: $f(p) = g(p)$ и $df_p = dg_p$, то тогда $f \equiv g$.

Опр. $f: M \to N$ — лок. изометрия, если $\forall p \in M$ сущ. окр-ть $U < M$, т.ч. $f|_U$ — изометрия $U \to f(U)$.

Предл Пусть $f: M \to N$ — лок. изом. Тогда
1) если M полно, то f явл накрытием.
2) если f — накрытие, то M — полное $\Leftrightarrow N$ полно.

Предл. Если $f: M \to N$ лок. изом. и накрытие степени d, то тогда $\operatorname{Vol}(M) = d \cdot \operatorname{Vol}(N)$.

Опр. $\operatorname{Isom}(M)$ — полная группа движений/изометрий $f: M \to M$.

Теор $\operatorname{Isom}(M)$ — группа Ли.

Примеры 1) $\operatorname{Isom}(S^n) = O_{n+1}(\mathbb{R})$
2) $\operatorname{Isom}(E^n) = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_N(\mathbb{R})$.

изометрии в E^n: $x \longmapsto Ax + b$, $A \in O_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in GL_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Опр. $\Gamma < \mathrm{Isom}(M)$ — дискр. гр. движ, если все орбиты дискретны и стабилиз. конечны.

Утв. Γ дискр. $\iff$ $\Gamma < \mathrm{Isom}(M)$ дискр. подмн-во в гр. Ли $\iff$ $\forall K \subset M$ компакт $\mathrm{card}\{\gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \varnothing\} < +\infty$

Опр. $\Gamma \curvearrowright M$ свободно, если все стабилизаторы $\Gamma_p = \mathrm{Stab}(p) = \{\gamma \mid \gamma p = p\} =$ трив. $= \{e\}$.

Теор Пусть $\Gamma \curvearrowright M$ дискр. и свободно изометриями. Тогда на пр-ве орбит $M/_{\Gamma}$ сущ. единств. риманова структура, т.что накрытие

$\pi: M \longrightarrow M/_{\Gamma}$ явл. лок. изом.

Пример $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{E}^2$ паралл. переносами:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+m \\ y+n \end{pmatrix}$. Тогда $\mathbb{E}^2/_{\mathbb{Z}^2} \cong$ Тор.

6. Однородные пространства — гладкие многообразия

Напомним, что стабилизатор точки $p \in X$ для группы G обозн. через G_p.

Опр Действие $G \curvearrowright X$ свободно, если $G_p = \{e\}$ $\forall p \in X$.

Опр. (Дифференцируемое) Действие $G \curvearrowright X$ собственное, если $\forall$ компакта $K \subset X$

$\{g \in G \mid gK \cap K \neq \varnothing\}$ — компакт.

Теор. Если $G \curvearrowright X$ — собств., своб., дифф. $\curvearrowright$ на гладком мн-ии X, то $X/G = \{$ орбиты $Gx \mid x \in X\}$ — гладкое мн-ие, причем $\dim X/G = \dim X - \dim G$.

Теор Пусть $H < G$ — подгр. Ли (гр. Ли). Тогда на G/H $\exists$ стр-ра гладкого мн-ия, причем $G \curvearrowright G/H$ дифф. и $\dim G/H = \dim G - \dim H$.

Теор. Пусть $G \curvearrowright X$ (гр. Ли) транзитивно, $p \in X$ — некот. точка, $G_p = H$. Тогда G_p — замкн. подгруппа и естеств. отобр. $G/H \to X$, $gH \mapsto gp$, явл. диффеоморфизмом, перестановочным с действием группы G.

Теор. Пусть G — группа Ли, $K < G$ — комп. подгр. Тогда на мн-ии G/K $\exists$ G-инв. риманова метрика. Если предст. изотропии $d_o : K \to GL(T_oX)$, где $o = eK \in X$, точно, то метрика единств. с точностью до пост. множ-ля.

Примеры 1) $E^n = \mathrm{Isom}(E^n) / \mathrm{Isom}(E^n)_0 = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R}) / O_n(\mathbb{R})$,

т.к. $\mathrm{Isom}(E^n) = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R}) = G$; $G_0 = O_n(\mathbb{R})$.

2) $S^n = O_{n+1}(\mathbb{R}) / O_n(\mathbb{R})$.

3) Пр-во Лобачевского $H^n = O^+_{n,1}(\mathbb{R}) / O_n(\mathbb{R})$,
(подробнее обсудим позже)

где $H^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid (x,x) = -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1,\ x_0 > 0 \}$

$O^+_{n,1} < O_{n,1} = \{ A \in GL_{n+1}(\mathbb{R}) \mid A^T I_{n,1} A = I_{n,1} = \mathrm{diag}(-1, +1, \ldots + 1) \}$,

$O^+_{n,1}$ – подгр. инд. 2 в $O_{n,1}$, т.ч. $O^+_{n,1}(H^n) \subseteq H^n$.

Гиперб. метрика: $\cosh \rho_H(x,y) = -(x,y)$; $\mathrm{Isom}(H^n) = O^+_{n,1}$

4) Если $G/_K$ – однор. рим. мн-ие, то не обязательно $G = Isom(X)$. Напр., если $K \not\subseteq O_n$, то тем не менее $E^n = \mathbb{R}^n \rtimes K/_K$.

5) Если Γ – дискр. группа движ., т.е 0-мерная группа Ли, то $\dim X/_\Gamma = \dim X$; $X/_\Gamma$ – гл. мн-ие, если $\Gamma \curvearrowright X$ своб; вполне разрывно. (properly discontinuous)

Замечание: $Isom(M)$ может быть вообще тривиальной или иметь очень мало элементов. Поэтому вовсе не любое риманово многообразие имеет вид: $M = G/_K$, где $G = Isom(M)$, $K = G_p$.

Теор Однако, если $\forall p \in X$ $\exists s_p \in Isom(X)$ – ц.с., т.е. $s_p^2 = e$ и $d_p s_p = -Id$, то тогда $G = Isom(X) \curvearrowright X$ транз, $G/_K$ – рим мн-е, $G^0/_{G^0 \cap K} \cong X$.

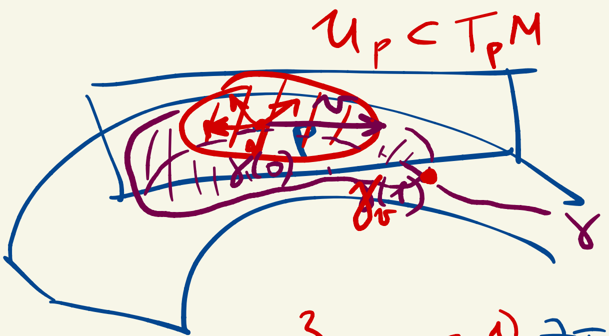
7. Экспоненц. отображение и геодезические

Опр. Геод. $\gamma : I \to M$ наз. макс., если не сущ. $J \supsetneq I$ т.ч. $\gamma : J \to M$ тоже геод.

Теор. Пусть $p \in M$ и $v \in T_pM$. Тогда $\exists$ единств. макс. геод. $\gamma : I \to M$, т.ч. $0 \in I$, $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$.

Опр. Экспоненц. отобр. $\exp_p : U_p \to M$, где $U_p \subset T_pM$, $U_p \ni$ начало координат, определяется след. обр.: $v \mapsto \gamma_v$ – макс. геод., $\gamma_v(0) = p$, $\dot\gamma_v(0) = v$, тогда $\gamma_v : I_v \to M$

$U_p := \{ v \in T_pM \mid 1 \in I_v \}$ и $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$



Теор. $d_p \exp_p = Id$ и

$\exp_p : U_p \to \exp_p(U_p)$ – диффео.

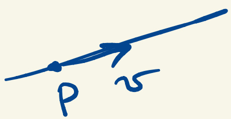
Замеч. 1) Эта эксп. имеет связь с экспонентой в группах Ли при рассм. римановых симм. пространств вида G/K.

2) Теор. про существование и единств. макс. геодезических говорит в частности о том, что если применить к M изометрию $F: M \to M$, т.ч. $F(p) = p$; $d_pF(v) = v$, то $F(\gamma_v(t)) = \gamma_v(t)$, т.е. $\gamma_v(t) \subset Fix(F)$.

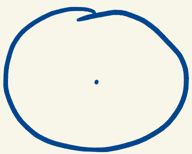
8. Неформальное введение в понятие кривизны.

Опр. Для кривых $\gamma(s) \subset \mathbb{R}^n$ в натур. параметризации (т.е. такой, что $\|\gamma'(s)\| \equiv 1$) кривизна — это $k(s) = \|\gamma''(s)\|$ (норма 2-й производной).

Утв. Кривизна — это то, насколько кривая отличается от прямой.

1) 

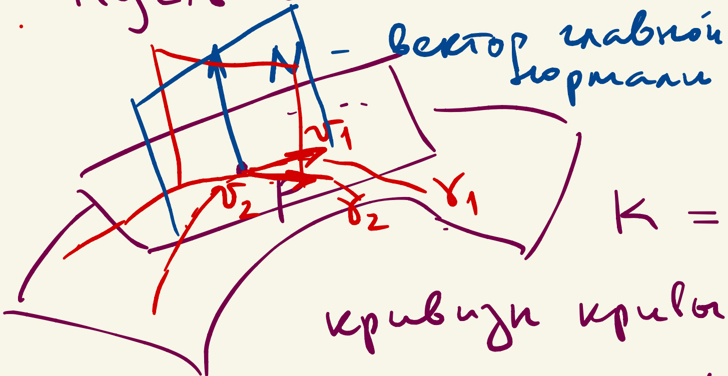
$\ell(s) = p + s\cdot v$; здесь $k(s) \equiv 0$.

2) 

$S^1 \subset \mathbb{R}^2$; здесь $k(s) \equiv 1$.

Опр. Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — n-мерная регул. гиперпов-ть.

Тогда



Гауссова кривизна

$$K = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$$

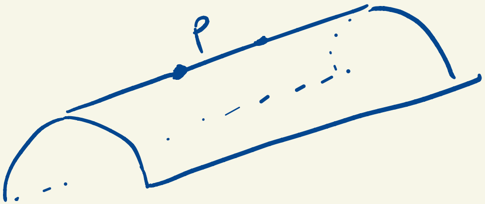
— произведение кривизн кривых, получившихся с помощью нормальных сечений пов-ти S пл-тями $\langle N, v_j \rangle$, где v_j — некие каноническим образом выбранные главные направления.

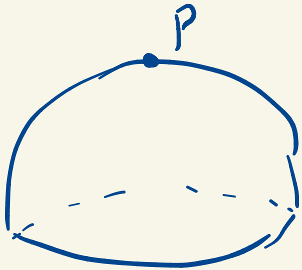
(При $n=2$, k_1, k_2 — это просто max и min кривизна норм. сечений.)

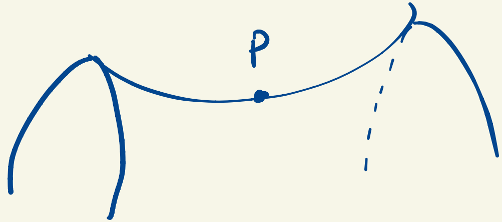
Но: здесь кривизны берутся со знаком $\pm$ в завис. от того, сонаправл. векторы $\gamma_j''(s)$ и N или противонаправлены.

Геом. смысл гауссовой кривизны

$p \in S \subset \mathbb{R}^3$







$K = 0$ (лок. цилиндр)

$K > 0$ (лок. сфера)

$K < 0$ (лок. седло).

Замечание 1) Для (абстрактных) римановых многообразий (M, g) можно определить тензоры кривизны, зависящие от метрики g. Тензоры кривизны позволяют опред-ть т.наз. скалярную кривизну, которая равна $2K$, если $S \subset \mathbb{R}^3$.

2) Также есть важное понятие секционной кривизны мн-ия (M, g) вдоль 2-мерного напр. $(u, v) = U \subset T_pM$

это гауссова кривизна 2-мерного подмн-я $S \subset M$,

где $T_pS = U$.

<u>Теор.</u> Имеется всего 3 полных, связных, односв. римановых мн-ий постоянной во всех точках секц. кривизны всякого 2-мерного направления.

Пространства пост. кривизны K:

$K \equiv 0$: $M = E^n$

$K \equiv +1$: $M = S^n$

$K \equiv -1$: $M = H^n$ – пространство Лобачевского.

10. Завершение курса: связь геометрии и топологии.

Теор. (Гаусс; Бонне)

Пусть (M, g) — компактное 2-мерное риманово мн-е с краем ∂M. Тогда

$$\int_M K\,dS + \int_{\partial M} k(s)\,ds = 2\pi \cdot \chi(M).$$

K — гаусс. крив.

Теор (об униформизации). Всякая комп. 2-мерная пов-ть (без края) снабжается метрикой пост. кривизны, т.е. имеет вид E^2/Γ, S^2/Γ или H^2/Γ.

Пример Рассм. ориент. комп. пов-ти S_g без края.

$S_0 = S^2$ $\qquad S_1 = T^2 = E^2/\mathbb{Z}^2$ $\qquad S_{g\geq 2} = H^2/\Gamma_g$

Вспомним теор. Гаусса-Бонне.

$$\int_{S_g} K\,dS + 0 = 2\pi\,\chi(S_g) = 2\pi(2-2g).$$

$$\parallel$$

$$K \cdot \mathrm{Area}(S_g)$$

Вывод 1) Площадь: топологич инвариант

2) $K \equiv 0 \iff g = 1$

$K \equiv 1 \iff \mathrm{Area}(S_g) = 4\pi \iff g = 0$

$K \equiv -1 \iff \mathrm{Area}(S_g) = 2\pi(2g-2)$

$\Updownarrow$

$g \geq 2$