Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 12: степень отображения, индекс, теорема Пуанкаре — Хопфа

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Степень отображения

Если $\dim M = \dim N$, $f \in C^\infty(M,N)$, $y \in M$ – регул. значение, M, N – замкнутые, то тогда $\mathrm{card}(f^{-1}(y)) < +\infty$.

Опр Пусть M, N также ориентируемы и связны.

Тогда $$\deg f := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{sgn}(\det d_x f) \; (=\deg(f;y))$$

Теор (1) $f \simeq g \Rightarrow \deg(f;y) = \deg(g;y)$.

(2) $\deg(f;y_1) = \deg(f;y_2)$. ($= \deg f$ не зависит от точки)

Док-во: (идея)

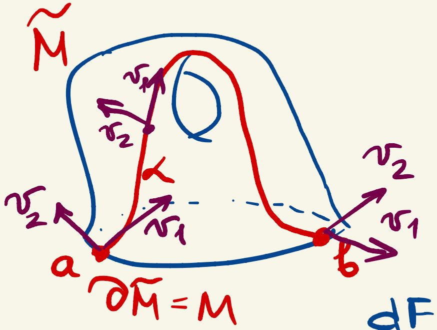
(1) 1) Пусть f продолжается до $F : \tilde{M} \to N$, где $\partial\tilde{M} = M$.

Тогда $\deg(f;y) = 0$ $\forall$ рег. y.

Действит, если $y \in N$ рег. для F и $f = F|_M$, то $F^{-1}(y)$ = конечное объединение дуг и S^1 (т.к. $F^{-1}(y)$ — комп. 1-мерное),

причем концы дуг лежат в $\partial \tilde{M} = M$.

Пусть α (дуга от a до b) $\subset F^{-1}(y)$; $\partial\alpha = \{a\} \cup \{b\}$.



Пусть $v_1(x)$ — положит. ориент. единичный вектор, касат. к дуге α. Ориентация дуги определяется тем, переводит ли d_xF набор $(v_2, .., v_n)$ в полож. ориент. базис пр-ва T_yN или нет. Отсюда видим, что если $v_1(a)$ "смотрит внутрь" от края $\partial\tilde{M}$, то $v_1(b)$ — "наружу".

Тогда $\operatorname{sgn} d_a f = -1$, $\operatorname{sgn} d_b f = +1$.

Следовательно, $\operatorname{sgn} d_a f + \operatorname{sgn} d_b f = 0$ и

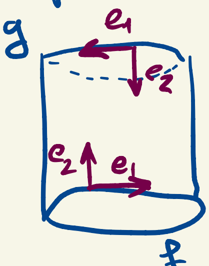
сумма по всем таким дугам $= \deg(f;y) = 0$.

Если же y не регул. для F, а регул. только для отобр f, то мож заметить, что $\deg(f;y) \equiv \mathrm{const}$ в некот. окр-ти U, где можно выбрать рег. y_1 для F.

Тогда $\deg(f;y) \overset{\downarrow}{=} \deg(f;y_1) \overset{\text{док.}}{=} 0$. ч.т.д.

2) Теперь рассм. $F: [0,1]\times M \to N$, $f(x) = F(0,x)$
$g(x) = F(1,x)$.

Ориентируем $[0,1]\times M$. Тогда на $0\times M$ и $1\times M$ противопол
(как произв.) ориентации (см. e_1 и e_2 на рис.).

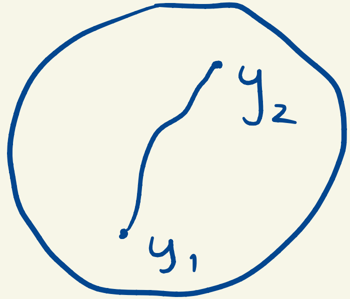


$$\deg\left(F|_{\partial([0,1]\times M)}; y\right) = 0$$
$$\| $$
$$\pm\left(\deg(f;y) - \deg(g;y)\right).$$ ч.т.д.

② Остается использовать след. лемму.

Лемма Если $y_1, y_2 \in \overset{\text{комп, св}}{N}$, то $\exists\, F \in \mathrm{Diffeo}(N)$, где $F(y_1) = F(y_2)$ и F изотопен Id.

гомотопии через F_t так, что F_t есть диффео $\forall\, t \in [0,1]$.



$$\text{Тогда } \deg(f; y_1) \overset{F \text{ сохр. ориент.}}{=} \deg(F \circ f; F(y_1)) = \deg(F\circ f; y_2) \overset{F\circ f \simeq f,\ \text{т.к. } F \simeq \mathrm{Id}}{=} \deg(f; y_2). \ \boxtimes$$

Примеры (применения степени)

1) Основная теорема алгебры: $z \in S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

В окр-ти ∞ исп. параметр $w = 1/z$ (отобр. $w' = \frac{1}{P(z)} = \frac{w^n}{1 + a_{n-1}w + \ldots + a_0 w^n}$ гладкое в $w = 0$)

Здесь $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$.

Можно показать, что $\deg(z^n) = n$ и что $z^n \simeq P(z)$.
$(z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0))$.

2) Полезная формула: если $\dim M = \dim N$ и $f \in C^\infty(M,N)$, а также $\omega \in \Omega^n(N)$, то тогда

$$\boxed{\int_M (f^*\omega) = (\deg f) \cdot \int_N \omega.}$$

2. Индекс особой точки вект. поля

Пусть $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$ — вект. поле на M.

$x_0 \in M$ — особая точка, если $v(x_0) = 0$;

x_0 — изолированная особая, если $\exists \underset{\text{окр}}{U \ni x_0}$: $v\big|_{U \setminus x_0} \neq 0$.

x_0 — невырожд. особая, если $\det\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big|_{x_0}\right) \neq 0$.

Утв Невырожд. $\Rightarrow$ изолирована.

Рассмотрим след. отобр. $\tilde{v}(x) = \dfrac{v(x)}{\|v(x)\|}$; $\tilde{v} : U \to S^{n-1}$.

Замечание: $\|v\|^2 = g(v,v)$ — риманова метрика, про которую речь пойдет уже скоро...

Опр $\tilde{v}$ — гауссово отобр.

Опр. Индекс изолир. особой т. x_0 вект. поля $v(x)$ есть

$$\operatorname{ind}_{x_0}(v) := \deg(\tilde{v}; x_0).$$

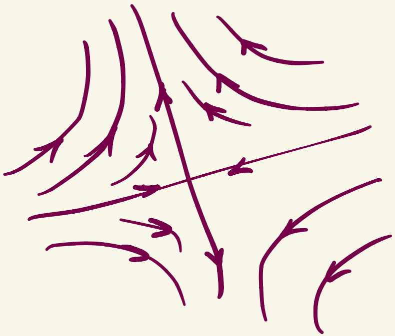
Рассмотрим матрицу $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big|_{x_0}\right)$. Пусть x_0 – невырожд. особая точка. Тогда собств. числа $\lambda_1, .., \lambda_n$ этой матрицы $\neq 0$, т.к. $\det\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

<u>Утв.</u> $\operatorname{sgn}(\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n) = \operatorname{ind}_{x_0} v$, если x_0 – невырожденная особая точка.

С вект. полем $v(x)$ связана система дифф. ур-ий $\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, .., x_n)$. Поведение кривых, "касающихся" поля v, а также являющихся решениями сист. дифф. ур-ий, описывается индексом $\operatorname{ind}_{x_0} v$ (и собств. знач-ми $\lambda_1, .., \lambda_n$).

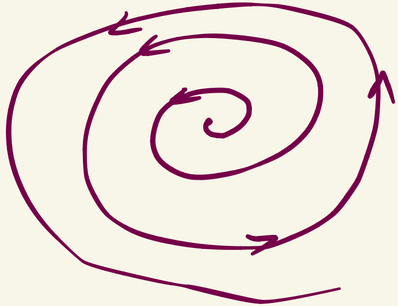
Эти кривые называют
- интегральными кривыми
- траекториями
- силовыми линиями поля v.

Пусть $M = \mathbb{R}^2$. Тогда имеем след. иллюстрацию для интегр. кривых в зависимости от индекса.



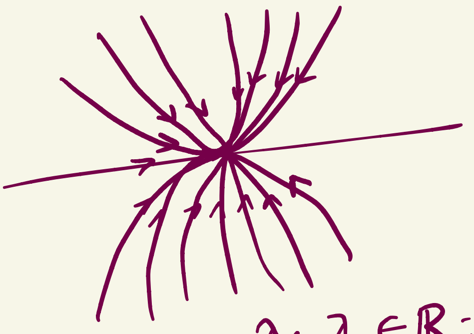
$\operatorname{ind}_{x_0} v = -1$; x_0 – седловая

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.



$\operatorname{ind} v = +1$; x_0 – фокус

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{\lambda_1} = \lambda_2$



x_0 – узел; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

$\operatorname{ind} v = +1$

Теорема (Пуанкаре-Хопфа)

Пусть M - комп. ориент. многообразие; v - гладкое поле на M с изолированными нулями $p_1, \dots, p_s$.

(Если $\partial M \neq 0$, то требуем, чтобы $v|_{\partial M}$ смотрело наружу).

Тогда

Эйлерова характеристика

$$\sum_{j=1}^{s} \mathrm{ind}_{p_j}(v) = \chi(M) := b_0 - b_1 + b_2 - \dots = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k(M, \mathbb{R}),$$

Следствие Σ индексов вект поля есть тополог. инвариант; и она не зависит от выбора вект. поля.