Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 11: когомологии де Рама - II

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Гомотопическая инвариантность

Изучим сначала связь дифф. форм на M и $M \times [0,1]$.

$\bigsqcup_p \Lambda^k(T_pM) = \Lambda^k(TM)$

Лемма/Утв Всякая $\omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$ раскладывается в сумму $\omega = \omega_1(t) \wedge dt + \omega_2(t)$, где $\omega_1^{(t)} \in \Omega^{k-1}(M)$; $\omega_2^{(t)} \in \Omega^k(M)$, $t \in [0,1]$.

В лок коорд:

$$\omega_1(t) = \sum_{j_1 < \ldots < j_{k-1}} \omega^1_{j_1 \ldots j_{k-1}}(x,t)\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}};$$

$$\omega_2(t) = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \omega^2_{j_1 \ldots j_k}(x,t)\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}.$$

Положим

$$D\omega := \int_0^1 \omega_1(t)\,dt = \sum_{j_1<\ldots<j_{k-1}} \left(\int_0^1 \omega^1_{j_1\ldots j_{k-1}}(x,t)\,dt\right) \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}}$$

(будем обозначать через $\omega|_c$ ограничение формы $\omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$ на $M|_c = M \times \{c\} \subset M \times [0,1]$)

Упр/Лемма Соотв-е $\omega \mapsto D\omega$ порождает гомоморфизм из $\Omega^k(M \times [0,1])$ в $\Omega^{k-1}(M)$.

Лемма Если $\omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$, то тогда

$$Dd\omega - dD\omega = (-1)^k(\omega|_1 - \omega|_0).$$

$D_{k+1} d\omega - dD_k\omega$

$D_k \to (-1)^k D_k$

$(-1)^{k+1} D_{k+1} d\omega - (-1)^k dD_k\omega =$

$= (-1)^{k+1}(D_{k+1} d\omega + dD_k\omega)$

$= (-1)^k(\omega|_1 - \omega|_0).$

Док-во: Благодаря утверждениям выше, имеем

$$dD\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_{k-1}} \left(d\int_0^1 \omega^1_{j_1\ldots j_{k-1}}(x,t)\,dt \right) \wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_{k-1}} =$$

просто скобки

$$= \sum_{j_1<\ldots<j_{k-1}} \left(\sum_{m=1}^{n} \left[\int_0^1 \frac{\partial \omega^1_{j_1\ldots j_{k-1}}(x,t)}{\partial x_m}\,dt \right] \cdot dx_m \wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_{k-1}} \right.$$

с другой стороны

$$D(d\omega_1\wedge dt) = D\left(\sum_{j_1<\ldots<j_{k-1}} \sum_m \frac{\partial \omega^1_{j_1\ldots j_{k-1}}(x,t)}{\partial x_m} \wedge dx_m\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_{k-1}} \right) =$$

$$= \sum_{j_1<\ldots<j_{k-1}} \sum_m \left[\int_0^1 \frac{\partial \omega^1(x,t)}{\partial x_m}\,dt \right] \wedge dx_m \wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_{k-1}} = dD\omega.$$

Отсюда следует, что

$$Dd\omega - dD\omega = Dd(\omega_1(t)\wedge dt + \omega_2) - dD\omega =$$

$$= D(\cancel{d\omega_1 \wedge dt} + d\omega_2) - \cancel{dD}\omega = Dd\omega_2 =$$

$$= D\Big(\cancel{\sum_{m=1}^{n} \sum_{j_1<\ldots<j_k} \frac{\partial \omega^2(x,t)}{\partial x_m} dx_m \wedge \underbrace{dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}}_{d\tilde{x}}}\Big) +$$

$$+ D\Big(\sum_{j_1<\ldots<j_k} \frac{\partial \omega^2_{j\ldots}(x,t)}{\partial t} dt \wedge d\tilde{x} = \Big[$$ По опред. D применяем его к форме вида $\omega_1 \wedge dt + \omega_2$ и получаем $\int_0^1 \omega_1 dt$ $\Big]$

$$= (-1)^k D\Big(\sum_{j_1<\ldots<j_k} \frac{\partial \omega^2_{j\ldots}(x,t)}{\partial t} d\tilde{x} \wedge dt\Big) =$$

$$= (-1)^k \sum_{j_1<\ldots<j_k} \Big(\int_0^1 \frac{\partial \omega^2_j}{\partial t} dt\Big) \cdot d\tilde{x} = (-1)^k \sum_{j_1\ldots j_k} \Big(\omega^2_{j_1\ldots j_k}(x,1) -$$

$$- \omega^2_{j_1\ldots j_k}(x,0)\Big)\Big) \cdot d\tilde{x} = (-1)^k \left(\omega^2\big|_1 - \omega^2\big|_0\right)$$

Заметим, что $T_x M_c$ не содержит векторов $\frac{\partial}{\partial t}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $dt = 0$ на всех M_c $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\omega^2|_1 - \omega^2|_0 = \omega|_1 - \omega|_0$ (т.к. $\omega = \omega^1 \wedge dt + \omega^2$) $\boxtimes$

Теор Пусть $f_0, f_1 : M \to N$, $f_0 \overset{F\text{-гомотопия}}{\simeq} f_1$. Тогда отображение пр-в когомологий $f_0^* : H^*(N, \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$ и $f_1^* : H^*(N, \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$ совпадают.

Док-во: Пусть $F : M \times [0,1] \to N$ – гомотопия между f_0 и f_1. Пусть $\omega \in \Omega^k(N)$ и $\omega' = F^*\omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$. Согласно предыдущим леммам: $f_1^*\omega = \omega'_1$; $f_0^*\omega = \omega'_0$, а также
(Если $M \subset M'$ с помощью f, $\omega \in \Omega^k(M')$, то $f^*\omega = \omega|_M \in \Omega^k(M)$;
в нашем случае $M' = M \times [0,1]$, $M \times 0$ и $M \times 1 \subset M'$.)

$$f_1^* \omega - f_0^* \omega = \omega_1' - \omega_0' = (-1)^k (Dd\omega' - dD\omega') =$$

$$= (-1)^k \left(Dd(F^*\omega) - dD(F^*\omega) \right).$$

Если $\omega \in Z^k$ (замкн, т.е. $d\omega = 0$), тогда $dF^*\omega = F^* d\omega = 0$.

В этом случае $f_1^*\omega - f_0^*\omega = (-1)^{k+1} d\left(D(F^*\omega)\right) \to$ точные формы

Таким образом, разность замкн. форм $f_1^*\omega$ и $f_0^*\omega$ — точная форма

Следовательно, $f_1^*\omega$ и $f_0^*\omega$ представляют один и тот же класс когомологий в $H^*(M, \mathbb{R})$. $\blacksquare$

Следствие Если $M \simeq N$, тогда $H^*(M,\mathbb{R}) \cong H^*(N,\mathbb{R})$.

Док-во: $\exists\, f: M \to N$, $g: M \leftarrow N$: $f \circ g \simeq Id_N$, $g \circ f \simeq Id_M$. Рассмотрим отобр-я

$f^*: H^*(N) \to H^*(M)$

$g^*: H^*(N) \leftarrow H^*(M)$.

В силу пред. теоремы имеем:

$$g^* f^* = (fg)^* = (Id_N)^* = Id_{H^*(N)}$$ → тожд. отобр.

$$f^* g^* = (gf)^* = (Id_M)^* = Id_{H^*(M)}$$ ↗ колец когом-ий на себя, обратные друг другу.

Следовательно, есть изоморфизм $H^*(M) \simeq H^*(N)$. ☒

Утв Все замкн формы степени $k>0$ на $\mathbb{R}^n$ и B^n точны.

($\mathbb{R}^n \simeq B^n \simeq$ точке).

(лемма Пуанкаре)

2. Точные последовательности

Опр. Пос-ть гомоморфизмов $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ точна в B, если $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$. Пос-ть $\to A_i \to A_{i+1} \to \dots$ вся назыв. точной, если она точна во всех A_i.

Теор. Пусть имеется комм. диаграмма гомоморфизмов вект. пр-в, в которой все столбцы, начиная со 2-го, точны,

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & A_0 \arrow[r, "a_0"] \arrow[d, "f_0"] & A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & \dots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "a_n"] \arrow[d, "f_n"] & {} \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g"] & B_0 \arrow[r, "b_0"] \arrow[d, "g_0"] & B_1 \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, "g_1"] & \dots \arrow[r] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "g_n"] & {} \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & C_0 \arrow[r, "c_0"] \arrow[d] & C_1 \arrow[r, "c_1"] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
 & 0 & 0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

а строки удовл. соотношениям: $a_0 a = a_{i+1} a_i = b_0 b = b_{i+1} b_i = c_0 c = c_{i+1} c_i = 0$

Тогда эта диаграмма порождает точную посл-ть пространств когомологий $0 \to H^0(A) \xrightarrow{\tilde f_0} H^0(B) \xrightarrow{\tilde g_0} H^0(C) \xrightarrow{\tilde h_0} H^1(A) \xrightarrow{\tilde f_1} H^1(B) \xrightarrow{\tilde g_1}$
$\to H^1(C) \xrightarrow{\tilde h_1} \dots$, где $H^0(A) = \operatorname{Ker} a_0$, $H^n(A) = \operatorname{Ker} a_n / \operatorname{Im} a_{n-1}$,
$H^0(B) = \operatorname{Ker} b_0$, $H^n(B) = \operatorname{Ker} b_n / \operatorname{Im} b_{n-1}$,
$H^0(C) = \operatorname{Ker} c_0$, $H^n(C) = \operatorname{Ker} c_n / \operatorname{Im} c_{n-1}$,

гомоморфизмы $\tilde f_j$ и $\tilde g_j$ порождены f_j и g_j:

Вернемся к когомологиям де Рама.

Пусть M — компактное гладкое мн-е, $M = \overset{\text{открыт}}{M_1} \cup \overset{\text{открыт}}{M_2}$.

Рассмотрим $\tilde M = M_1 \sqcup M_2$ — несвязное объед.

Имеется гомоморфизм $\Omega^k(M) \xrightarrow{h_k} \Omega^k(\tilde M) = \Omega^k(M_1) \oplus \Omega^k(M_2)$.

и гомом. ограничений дифф. форм

$f_k^j : \Omega^k(M_1) \oplus \Omega^k(M_2) \to \Omega^k(M_j) \to \Omega^k(M_1 \cap M_2)$, где $j = 1, 2$,

и рассмотрим $f_k := f_k^2 - f_k^1 : \Omega^k(M_1) \oplus \Omega^k(M_2) \to \Omega^k(M_1 \cap M_2)$.

Отсюда получаем точную послед-ть:

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{h_k} \Omega^k(M_1) \oplus \Omega^k(M_2) \xrightarrow{f_k} \Omega^k(M_1 \cap M_2) \to 0.$$

Короткая послед-ть Майера-Виеториса

Лемма Она точна.

Док-во: Пусть $\omega \in \Omega^k(M)$. Тогда $h_k(\omega) = \omega|_{M_1} + \omega|_{M_2}$.

След., $h_k(\omega) \neq 0$, если $\omega \neq 0$. Т.е. посл-ть М-В точна в $\Omega^k(M)$.

Положим $\Omega := \{\omega_1 \oplus \omega_2 \in \Omega^k(M_1) \oplus \Omega^k(M_2) \mid \omega_1|_{M_1 \cap M_2} = \omega_2|_{M_1 \cap M_2}\}$.

Тогда $h_k(\Omega^k(M)) = \Omega$. С другой стороны, $f_k(\omega) = \omega|_{M_2} - \omega|_{M_1}$, где $\omega \in \Omega^k(M_1) \oplus \Omega^k(M_2)$. Таким образом, $f_k(\Omega) = 0$.

След., посл-ть М-В точна в $\Omega^k(M_1) \oplus \Omega^k(M_2)$.

Точность в $\Omega^k(M_1\cap M_2) \Leftrightarrow f_k$ — сюръект.

Пусть $\omega\in\Omega^k(M_1\cap M_2)$. Рассм. разб. 1 (ρ_1,ρ_2), подчин. покрытию $M_1\cup M_2$ мн-я M. (т.е. $\rho_i\geq 0$, $\operatorname{supp}\rho_i\subset M_i$, $\rho_1+\rho_2=1$).

Осталось рассм-ть сечения $\omega_1=\rho_2\omega$ и $\omega_2=\rho_1\omega$.

Тогда $\omega_j\in\Omega^k(M_j)$ и $f_k((-\omega_1)\oplus(\omega_2))=\omega_1+\omega_2=\omega$. $\blacksquare$

Теор Посл-ть М-В порожд. точную посл-ть пр-в когомол.:

$$0\to H^0(M)\xrightarrow{\tilde h_0} H^0(M_1)\oplus H^0(M_2)\xrightarrow{\tilde f_0} H^0(M_1\cap M_2)\xrightarrow{\delta_0} H^1(M)\to$$
$$\xrightarrow{\tilde h_1} H^1(M_1)\oplus H^1(M_2)\xrightarrow{\tilde f_1} H^1(M_1\cap M_2)\to\dots$$

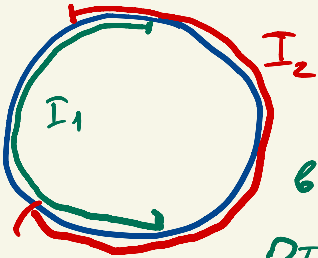
Док-во: Применим вышесказанное к диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "in"] \arrow[d] & \Omega^0(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\tilde h_0"] & \Omega^1(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(M) \arrow[r, "d"] & \dots \arrow[r, "d"] & \Omega^k(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "h_k"] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "in"] \arrow[d] & \Omega^0(M_1)\oplus\Omega^0(M_2) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_0"] & \dots & & \arrow[r, "d"] & \Omega^k(M_1)\oplus\Omega^k(M_2) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_k"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "in"] \arrow[d] & \Omega^0(M_1\cap M_2) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \dots & & \arrow[r] & \Omega^k(M_1\cap M_2) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & {} \\
 & 0 & 0 & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Пример $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.

Действ., $S^1 = I_1 \cup I_2$ (интервалы). Тогда $H^0(S^1) = H^0(I_1) - H^0(I_2) = \mathbb{R}$.

Заметим также, что $H^0(I_1 \cap I_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ ($I_1 \cap I_2$ — 2 св. компоненты, $H^0(I_1 \cap I_2) = \mathbb{R}^{b_0} \Leftarrow b_0 = \#$ св. комп)



Напомним, что согласно лемме Пуанкаре все замкн. формы степ $k > 0$ на $\mathbb{R}^n$ явл. точными. Отсюда $H^1(I_1 \cap I_2) = H^1(I_1) = H^1(I_2) = 0$.

Тогда длинная посл-ть М-В (пр-в когомол) имеет вид:

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\tilde{h}_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\tilde{f}_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\tilde{\delta}_0} H^1(S^1) \xrightarrow{\tilde{h}_1} \underbrace{0 \xrightarrow{\tilde{f}_1} 0 \to 0}$$

$H^k(M) = 0$, если $k > \dim M$.

В силу точности имеем $\ker \tilde{f}_0 = \operatorname{Im} \tilde{h}_0 = \mathbb{R}$.

Значит, $\operatorname{Im} \tilde{f}_0 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} / \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Таким образом, $\ker \tilde{\delta}_0 = \operatorname{Im} \tilde{f}_0 = \mathbb{R}$ и $\operatorname{Im} \tilde{\delta}_0 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} / \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Тогда $H^1(S^1) = \ker \tilde{h}_1 = \mathbb{R}$.

Теорема / Задача. $H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{при } k = 0, n \\ 0 & \text{в ост. случаях.} \end{cases}$

3. Двойственность Пуанкаре

Теор Пусть M – гладкое, компактное, ориент n-мн-е без края.

Тогда $\dim H^k(M) = \dim H^{n-k}(M)$.

Док-во: основано на след. утв-х:

Утв 1 $\omega \in \Omega^n(S^n)$ – точна $\Leftrightarrow \int\limits_{S^n} \omega = 0$.

Утв 2. Пусть ω – n-форма на $\mathbb{R}^n$ с компактным $\operatorname{supp} \omega$, т.ч. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$. Рассм шар $B \supset \operatorname{clos}(\operatorname{supp} \omega)$. Тогда $\omega = d\eta$, где $\operatorname{clos}(\operatorname{supp} \eta) \subset B$.

Утв. 3 Пусть M — компактное гладкое ориент. n-мное без края. Тогда $\omega \in \Omega^n(M)$ точна $\Leftrightarrow \int_M \omega = 0$.

Утв 4 / Теор. Если M — связное, гладкое, комп., ориент., без края и $\dim M = n$, то $\dim H^n(M) = 1$, т.е. $H^n(M) \cong \mathbb{R}$.

Далее введем некот. операцию для $\omega_1 \in \Omega^k(M)$ и $\omega_2 \in \Omega^{n-k}(M)$:

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int_M \omega_1 \wedge \omega_2 = \begin{cases} \langle \omega_2, \omega_1 \rangle, & \text{если } k(n-k) \text{ четно} \\ -\langle \omega_2, \omega_1 \rangle, & \text{если } k(n-k) \text{ нечетно} \end{cases}$$

Аналогичная опер. опред-ся для классов когомологий.

Утв. $d(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = d\alpha_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^k \alpha_1 \wedge d\alpha_2 = (-1)^k \alpha_1 \wedge d\alpha_2$,
где $\alpha_1 \in \Omega^{k-1}(M)$, $\alpha_2 \in \Omega^{n-k-1}(M)$.

След.: $\alpha_1 \wedge d\alpha_2$ — точна и $\langle \alpha_1, d\alpha_2 \rangle = \int_M \alpha_1 \wedge d\alpha_2 = 0$.