Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 10: когомологии де Рама

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1 Ориентируемость многообразий и дифф. k-форм

Пусть M — гладкое n-мн-ие. Тогда оно ориентируемо, если на атласе лок коорд. можно выбрать так, чтобы ф-ции перехода всегда имели полож. якобиан $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$

Вспомним, что $T_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle$; $\quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \partial_{x_1} = \partial_1, \quad \frac{\partial}{\partial x_n} = \partial_{x_n} = \partial_n$

$T_p^*M = \langle dx_1, \dots, dx_n \rangle$. Здесь $dx_i(\partial_j) = \delta_{ij}$.

Всякая дифф. k-форма на M есть элемент $\Lambda^k(T^*M)$, и она (Пр-во дифф. k-форм на M часто обозн через $\Omega^k(M)$.) имеет вид $\omega_p = \sum\limits_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k}(x)\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$.

Это запись в локальных координатах в конкретной карте (U, φ). Если задать ω во всех картах отдельно, то надо ещё проследить, чтобы по этим картам ω "гладко сшивалась" в глобальную форму на M. Иными словами, форма вида $dx_1 \wedge dx_2$ имеет такой вид только в одной карте, а в других может выглядеть совсем иначе, и даже может равняться 0. Такое может происходить и с формами макс. степени – n-формами вида $\omega = f(x)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$.

Предл. Гладкое n-многообразие M ориентируемо $\Longleftrightarrow$
$\exists\, \omega \in \Lambda^n(T^*M)$: $\omega_p \neq 0$ $\forall p \in M$.

(т.е. $\exists$ лин. нез. $v_1, \ldots, v_n \in T_pM$: $\omega_p(v_1, \ldots, v_n) = 0$
$\Longleftrightarrow$ $f(p) \neq 0$ $\forall p \in M$.)

Док-во: 1) Пусть $\omega \neq 0$ на M. Такая форма уже задаёт ориентацию в каждой точке ($f(p) > 0$ где $\omega = f(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$).

Если вдруг окажется, что переход между лок. коорд. $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1 \ldots y_n$ имеет отрицат. якобиан, то тогда в силу непр. ω (точнее $f(x)$) найдется т. p, где $f(p) = 0$.

2) Пусть M, наоборот, ориентируемо. Тогда $\Lambda^n_+(T^*M) \subset \Lambda^n(T^*M)$ – откр. подмн-во полож. ориентированных n-мономов.

В силу того, что ф-ции склейки гладкие и полож. ориентированы, мы берем форму ω в какой-то карте и переходим в ост. карты, пользуясь склейками. Остается использовать разбиение единицы для построения глобальной формы ω. $\square$

Предл. Пусть $F: M \to N$ – лок. диффеоморфизм, и пусть N-ориент. Тогда M тоже ориентируемо с помощью pullback orientation, пришедшей за счет формы $F^*\omega$, где $F^*: \Lambda^k(T^*N) \to \Lambda^k(T^*M)$, $\omega \in \Lambda^n(T^*N)$, $\omega \neq 0$; причем F здесь сохраняет ориентацию.

Предл. Пусть M – ориент; $\partial M \neq \emptyset$. Тогда на ∂M, тоже существ. ориентация.

Предл. Пусть $\pi: E \to M$ – накрытие гл. мн-ий; M – ориент. Тогда E тоже ориент. (следует из того, что π – local diffeo.)

Теор Пусть E – связное, ориент, гладкое мн-ие и $\pi: E \to M$ – накр. Тогда M – ориент $\Leftrightarrow$ $\Gamma = \mathrm{Aut}_\pi(E)$ = группа накрытия – сохраняет ориентацию.

Задача / Пример Рассм. $S^2 < \underset{\langle x,y,z \rangle}{\mathbb{R}^3}$ и 2-форму

$$\omega = x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy.$$

1) Это форма объема на S^2, т.е $\int_{S^2} \omega = 4\pi$ (можно посчитать через т. Стокса).

2) $\omega_p \neq 0 \quad \forall p \in S^2$.

3) ω не проецируется на $\mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2 = S^2/\{x \mapsto -x\}$

4) $\mathbb{R}P^2$ не ориент, в частн., потому, что $x \mapsto -x$ не сохр. ориент. на S^2.

2. Когомологии де Рама

Операции с дифф. формами
$\nearrow$ $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Lambda^{p+q}$, если $\omega_1 \in \Lambda^p$, $\omega_2 \in \Lambda^q$
$\searrow$ $d : \Lambda^k \to \Lambda^{k+1}$

Опр. 1) k-форма ω точна, если $\exists \omega_1 \in \Lambda^{k-1}$: $d\omega_1 = \omega$ $(\omega \in \operatorname{Im} d)$

2) k-форма ω замкнута, если $d\omega = 0$ (т.е. $\omega \in \operatorname{Ker} d$).

(Заметим, что $d(d\omega) = 0$, т.е. точные формы замкнуты)

Замкн k-формы — k-мерные коциклы

Точные k-формы — k-мерные кограницы.

Пр-во замкн. k-форм $:= Z^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\}$

Пр-во точных k-форм $:= B^k(M) = \{\omega = d\omega_1 \mid \omega_1 \in \Omega^{k-1}(M)\}$.

Из соотношения $d \circ d = 0 \Rightarrow B^k(M) \subset Z^k(M)$.

Опр. Фактор-пр-во $H^k(M,\mathbb{R}) = Z^k(M)/B^k(M)$ — пространство k-мерных когомологий де Рама.

$\dim H^k(M,\mathbb{R}) = b_k$ — k-мерные числа Бетти.

Предл. 1) $H^k(M,\mathbb{R}) = 0$, если $k > n = \dim M$.

2) b_0 = число связных компонент мн-я M.

3) Пусть p — точка, тогда $H^k(p,\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$

Обозн. $H^*(M,\mathbb{R}) = \bigoplus_{k\geq 0} H^k(M,\mathbb{R})$ — градуированная алгебра, благодаря операции $\wedge$, т.е.

$$H^p(M,\mathbb{R}) \wedge H^q(M,\mathbb{R}) \subset H^{p+q}(M,\mathbb{R}).$$

Теор. Гладкое отобр. $F: M \to N$ определяет гомоморфизм групп когомологий $F^*: H^k(N,\mathbb{R}) \to H^k(M,\mathbb{R})$.

Док-во: Пусть $\omega \in Z^k(N)$, тогда $dF^*(\omega) = F^*(d\omega) = 0$.

Таким образом, $F^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M)$.

Аналогично, если $\omega = d\omega_1 \in B^k(N)$, то тогда

$F^*(\omega) = F^*(d\omega_1) = d(F^*\omega_1)$, где $F^*\omega_1 \in \Lambda^{k-1}(T^*M)$.

Отсюда следует, что $F^*(B^k(N)) \subset B^k(M)$.

То есть гомоморфизм вект. пр-в $F^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$

задает / порождает гомом. $F^*: Z^k(N)/B^k(N) \to Z^k(M)/B^k(N)$,

откуда $F^*: H^k(N) \to H^k(M)$.

3. Гомотопическая инвариантность $H^k(M,\mathbb{R})$.

$f_0 : M \to N$ и $f_1 : M \to N$ — гладко гомотопны, если $\exists$ гладкая гомотопия $H : M \times [0,1] \to N$, т.что

$$H(x,0) = f_0(x) \quad \text{и} \quad H(x,1) = f_1(x).$$

Теор. 1) Пусть $\underbrace{f_0 \simeq f_1}_{f_0, f_1 : M \to N}$ — гомотопные отобр-я. Тогда порожд. ими отобр-я пр-в когомологий совпадают:

$f_0^*, f_1^* : H^*(N,\mathbb{R}) \to H^*(M,\mathbb{R})$, $\quad f_0^*([\omega]) = f_1^*([\omega])$.

2) Если $M \simeq N$ (гомотопически эквив.), т.е. $\exists f : M \to N$, $g : N \to M$: $fg \simeq Id_M$, $gf \simeq Id_N$,

то тогда $H^*(M,\mathbb{R}) \cong H^*(N,\mathbb{R})$.

3) Все замкн. дифф. формы на $\mathbb{R}^n$ и шаре B^n явл. точными.