Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 1: введение и предварительные сведения

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

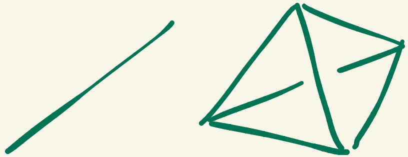
Содержание

1. Введение: что изучаем, какие объекты и структуры, значение геометрии в мире фундаментальной и прикладной математики.

2. Предварительные сведения.

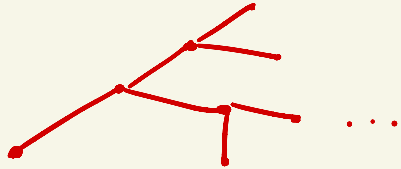
Введение: что изучаем, какие объекты и структуры, значение геометрии в мире фундаментальной и прикладной математики

1. Что такое «Геометрия»?

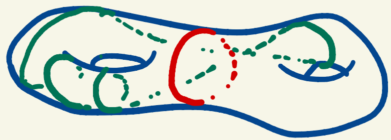


Геометрические объекты:

а) линейные: прямые, плоскости, подпространства, многогранники



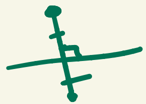
б) дискретные: системы точек в пространстве, графы, дискретные сетки



в) гладкие: кривые, поверхности, многообразия

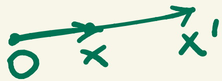
Группы преобразований:

- группы движений/изометрий: переносы, повороты, отражения, ...



- группы симметрий множеств (многогранников, графов, ...)
- группы аффинных преобразований: гомотетия, ...

$\overrightarrow{OX'} = \lambda \overrightarrow{OX}$

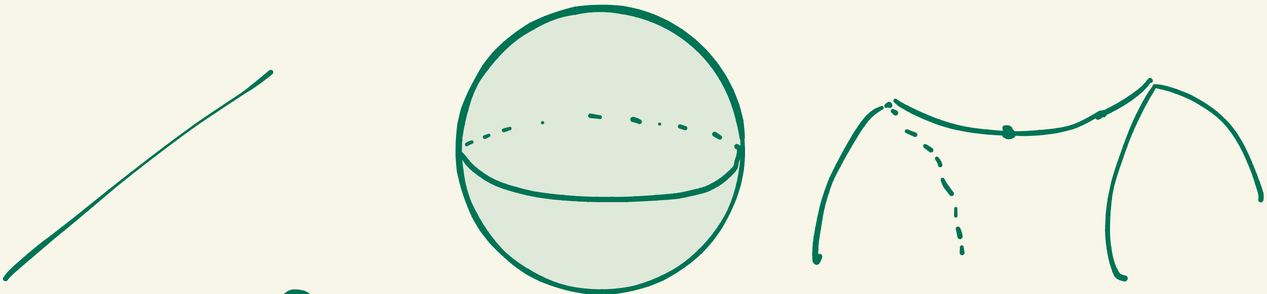


- группы гомеоморфизмов, диффеоморфизмов, полиномиальных морфизмов, ...

2. Дифференциальная геометрия и риманова геометрия

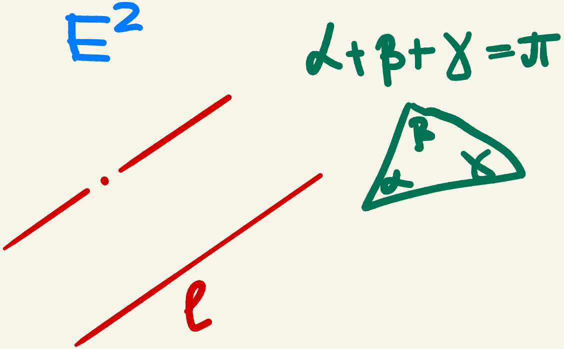
Дифф. геометрия — гладкие кривые, поверхности, многообразия

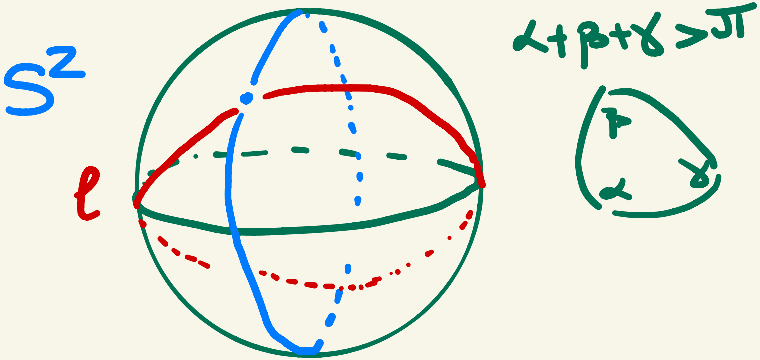
Риманова геометрия (Riemannian geometry) — римановы многообразия (снабженные метрикой), кратчайшие линии (геодезические), кривизна (curvature), углы между кривыми, площади, объемы, и т.д.



кривизна = 0 $\quad$ $k \equiv 1$ $\quad$ $K < 0$

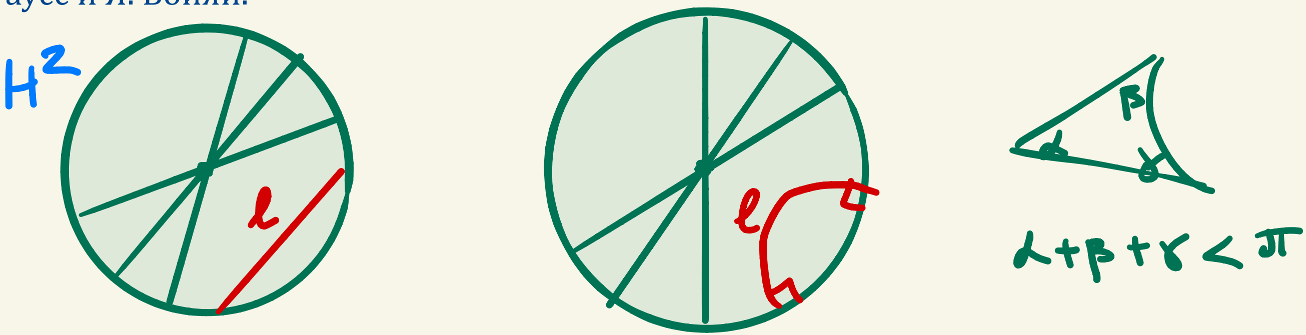
3. Евклидова и неевклидова геометрии





Открытие пространства Лобачевского H^n — одно из величайших научных открытий 19 века.

Первая официальная публикация — 1829 год, Н.И. Лобачевский. Параллельно этим занимались К. Гаусс и Я. Бойяи.



4. Геометрии и группы — эрлангенская программа Клейна, модельные геометрии, программа геометризации Терстона

Геометрия — пара (G, X), где G — группа преобразований, действующая на множестве X

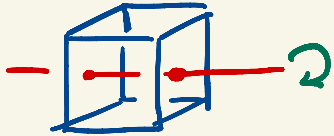
Примеры:

а) школьная планиметрия, по сути, состоит из двух частей

$\mathrm{Isom}(E^2) \curvearrowright E^2 \cong \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) \curvearrowright \mathbb{R}^2$

б) аналогично школьная стереометрия



в) (Sym(P), P) — группа симметрий многогранника P

г) более общо: группы изометрий метрических пространств Isom(X), группы гомеоморфизмов Homeo(M) и группы диффеоморфизмов Diffeo(M) многообразий, группы автоморфизмов Aut(X) алгебраических многообразий X, …

д) конечно-порожденные группы, дискретные группы - геометрическая теория групп

Модельные геометрии

Модельная геометрия (G, X) — односвязное гладкое многообразие X с транзитивным действием группы Ли G

$(\mathrm{Isom}(E^n), E^n)$

$\mathrm{Isom}\, E^n = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$

$(\mathrm{Isom}(S^n), S^n)$, где $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$\mathrm{Isom}(S^n) = O_{n+1}(\mathbb{R})$

Геометризация 2-мерных поверхностей: теорема об униформизации

Теорема об униформизации

Всякая односвязная риманова поверхность (1-мерное комплексное многообразие) конформно эквивалентна либо открытому диску в $\mathbb{C}$, либо сфере Римана $\mathbb{C}\cup\infty$, либо комплексной плоскости. Таким образом, всякая 2-мерная поверхность без края принадлежит одному из трех типов: S^2/Γ, $\mathbb{R}^2/\Gamma$, $\mathbb{H}^2/\Gamma$

$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ $\quad S_{g\geq 2} = \mathbb{H}^2/K_g$

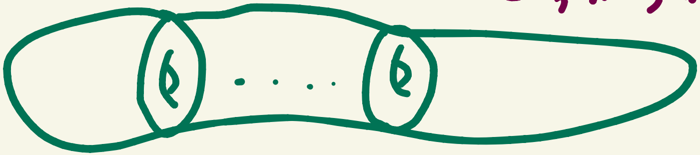
Классификация пов-тей: S^2

Программа геометризации Терстона: 3-многообразия

Теорема (Thurston’s Geometrization Conjecture 1982 = Perelman’s Theorem 2002)

Всякое связное компактное 3-многообразие M с (возможно, пустой) границей, состоящей из 2-мерных торов, можно так разрезать на блоки вдоль конечного семейства попарно непересекающихся торов, что внутренность каждого блока будет реализовывать одну из 8 модельных геометрий.

То есть, int(block) = X/Γ, где Γ < Isom(X) — дискретная группа движений, действующая свободно на пространстве X: S^3, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$, $S^2\times\mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, Nil, Sol, $\widetilde{SL_2}$.



Теорема (Фундаментальная теорема дифференциальной топологии)

$M \approx N$

Пусть M и N — два гладких n-многообразия, n<4. Если M и N гомеоморфны, тогда они и диффеоморфны. При n>3 это неверно.

$M \cong N$

Замечание: обобщенная гипотеза Пуанкаре верна для всех n в категории топологических многообразий (Фридман и Смейл), но для гладких верна при n=1,2,3,5,6, а при n=4 до сих пор открыта. При n=7 известны контрпримеры (Милнор).

Теорема (гипотеза Пуанкаре)

Всякое односвязное компактное 3-многообразие диффеоморфно S^3.

Роль пространства Лобачевского в маломерной геометрии и топологии:

Теорема (гиперболизации)

$\operatorname{card} \pi_1(M) = \infty$

$\pi_1(M) \not\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,

Всякое связное компактное 3-многообразие M без края, для которого является гиперболическим, то есть $M \cong H^3/\Gamma$, где $\Gamma < \operatorname{Isom}(H^3)$.

дискр, своб.

Теорема Терстона о классификации узлов (Теория узлов)

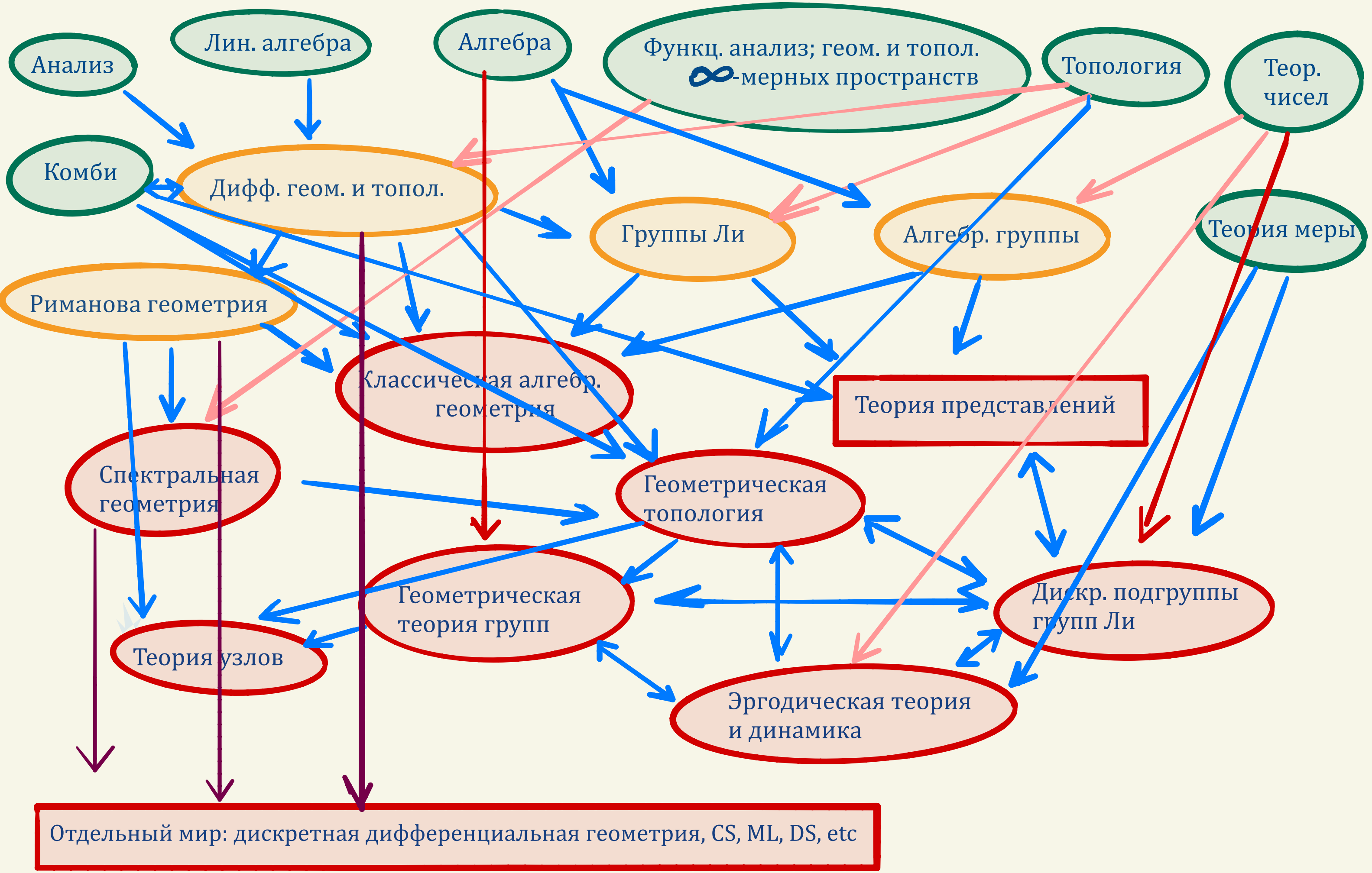
Пусть K — узел в 3-сфере. Если K — не торический и не сателлитный, то $S^3 \setminus K \cong H^3/\Gamma$.

Насколько много гладких структур в одной геометрии? Сложнейший вопрос!

Для гиперболических (n>2)-многообразий — теоремы жесткости Мостова, Прасада, Маргулиса.

Для n=2 — теория пространств модулей, теория Тайхмюллера, mapping class groups.

5. Место дифференциальной геометрии в фундаментальной и прикладной математике



Предварительные сведения

6. Дифференцируемые функции. Дифференциал и его геометрический смысл.

Опр. 1) $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>назыв. дифф.</u> в т. $a \in \mathbb{R}^n$, если

$\exists A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ – лин. оператор, т.ч.

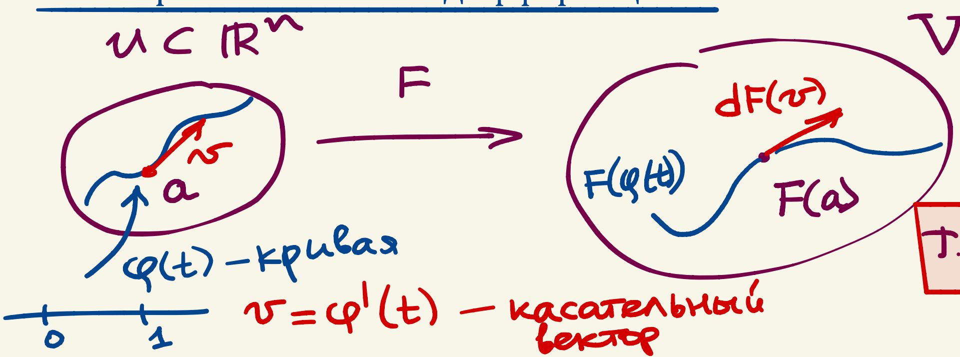
$$\lim_{v \to 0} \frac{\|F(a+v) - F(a) - Av\|}{\|v\|} = 0$$

2) <u>Обозн:</u> $A = dF$; <u>Утв</u>: $\mathrm{Mat}(dF) =$ Матр. Якоби $= \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

3) $\underline{F \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$, если $\frac{\partial^k F}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}$ сущ. и непр.

$\underline{F \in C^\infty}$, если $F \in C^k$ $\forall k = 1, 2, 3, \dots$.

Геометрический смысл дифференциала



$v = \varphi'(t)$ — касательный вектор

$dF(v)$ – касат. вектор к кривой $F \circ \varphi(t)$ в т. $F(a)$.

$$\boxed{\text{т.е. } dF: T_a U \to T_{F(a)} V}$$

7. Теоремы о неявной и обратной функциях

Теорема об обратном отображении

Пусть $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$; $F\in C^k(\mathbb{R}^n)$; $dF\in GL(\mathbb{R}^n)$ в т. $a\in\mathbb{R}^n$.

Тогда $\exists\ \underset{\text{окр-ть}}{U_0\ni a},\ \underset{\text{окр-ть}}{V_0\ni F(a)}$: $F|_{U_0}: U_0\to V_0$ — C^k-диффеоморфизм,

т.е. $F|_{U_0}$ — биективно; $F|_{U_0},\ F^{-1}|_{V_0}\in C^k(\mathbb{R}^n)$ в a и $F(a)$ соотв.

Теорема об неявной функции

Пусть $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n\in C^k(\mathbb{R}^{n+m},\mathbb{R}^n)$; $(a,b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ и

$F(a,b)=0$. Пусть $dF_{(a,b)}=\Big(\overbrace{dF_{(a,b)}|_{\mathbb{R}^n}}^{A_1};\ \overbrace{dF_{(a,b)}|_{\mathbb{R}^m}}^{A_2}\Big)$ — т.ч.

$dF_{(a,b)}|_{\mathbb{R}^n}\in GL(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\exists\ \underset{\text{откр}}{U}\subset\mathbb{R}^{n+m}$ и $\underset{\text{откр}}{V}\subset\mathbb{R}^m$, т.ч.

$(a,b)\in U$ и $\forall y\in V\ \exists!\ x=g(y)$, где $g\in C^k(V,\mathbb{R}^n)$, $g(b)=a$,

$F(g(y'),y')=0$ для всех $y'\in V$ и $dg_b=-A_1^{-1}\cdot A_2$.

8. Гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$

Опр. Гладкое d-мерное подмн-е в $\mathbb{R}^n$ — такое мн-во, которое локально есть образ регулярного отобр-я: $F:\underset{\mathcal{U}}{\mathbb{R}^d}\longrightarrow\mathbb{R}^n$; $d\le n$; $\operatorname{rank} dF$ — максимален в каждой точке $x\in\mathcal{U}$, т.е. $\operatorname{rank} dF = d$.

Эквив. задание подмн-й

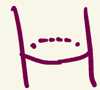
$\xrightarrow{\text{лок}}$ $\begin{cases} x_{d+1} = \varphi_{d+1}(x_1,\dots,x_d) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1,\dots,x_d) \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{лок}}$ $\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{cases}$; где $m = n-d$ и $\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) = m$.

Примеры 1) $d=0$ — дискр. подмн-во; $d=n$ — $\underset{\text{откр.}}{\mathcal{U}}\subset\mathbb{R}^n$

2) $\mathbb{R}^k\subset\mathbb{R}^n$ — k-мерная плоскость;

3) $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$; $S^n = \{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid (x,x) = 1\}$.

4) Любая регулярная пов-ть $F:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^n$, где $\operatorname{rank}(dF)=d$ (Без изломов — вложенные подмн-я в $\mathbb{R}^n$). Напр.  или 

9. Абстрактные гладкие многообразия с краем

Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой.

Опр. Внутренняя карта – пара $(\mathcal{U}, \varphi)$, где $\underset{\text{откр.}}{\mathcal{U} \subset M}$, $\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow[\text{homeo}]{\approx} \mathbb{R}^n$ (гомеоморф.)

Краевая карта – (V, ψ), где $\psi : V \to U^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} = \mathbb{R}^n_+$ (upper half-space)

Опр. $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ и $(\mathcal{U}_2, \varphi_2)$ согласованы, если функции "склейки"

$\varphi_{12} : \varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \to \varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (гладкие).

Опр. Атлас на M – система попарно согл. карт $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$, где $M = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$

Опр. Гладкое n-мерное многообразие (n-многообразие) – это хаусд. топ. пр-во, снабж. системой эквив. атласов.

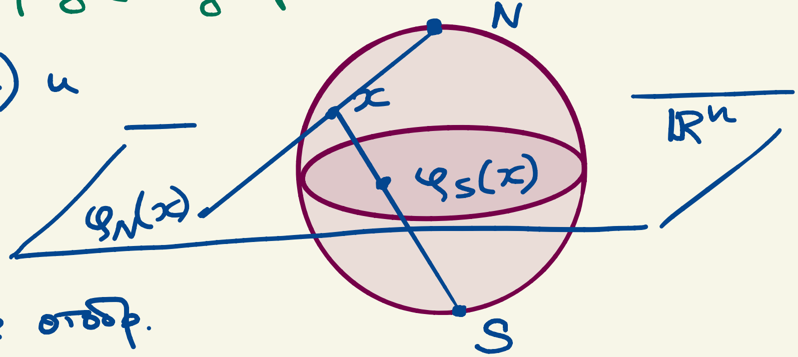
Край ∂M мн-я M – это прообразы всех граничных точек в краевых картах, т.е. $\partial M = \{\psi^{-1}(\{x_n = 0\}) \mid (V, \psi) - \text{краевая карта}\}$.

Многообр. с краем, если $\partial M \neq \varnothing$, и без края, если $\partial M = \varnothing$.

Примеры 1) $\mathbb{R}^n$ — 1-карта $(\mathbb{R}^n, id)$; $U \subset \mathbb{R}^n$ откр. область.
$\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$

2) Замкн. шар $\overline{B^n} \subset \mathbb{R}^n$; $\partial \overline{B^n} = S^{n-1}$.

3) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — гладкое n-многообразие без края. Миним. атлас состоит из 2 карт: $(S^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$ и $(S^n \setminus \{S\}, \varphi_S)$. Проверьте, что



1) $\varphi_N : S^n \setminus N \to \mathbb{R}^n$ - гомеоморфизм
2) $\varphi_{NS} : \varphi_N(x) \longmapsto \varphi_S(x)$ - гладкое отобр.

4) $U^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ — n-мн-е, $\partial U^n = \mathbb{R}^{n-1}$.

5) $\mathbb{R}P^n = P(\mathbb{R}^{n+1})$ — проективное n-мерное пр-во $= \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \ell \ni \{0\}\}$, ℓ — прямая.

Атлас из $n+1$ карты: $U_j = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mid x_j \neq 0\}$.
Метрическая топология на $\mathbb{R}P^n$: $\rho(x, y) = \angle(x, y)$, x, y - прямые.

$\varphi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$; $\varphi_j(x_0 : \ldots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \ldots \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right)$.

6) $f: U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкое регулярное отобр. Тогда

$M = f(U) \subset \mathbb{R}^n$ является гладким m-мерным (под)мн-ем.

(Атлас карт строится на основе теор. о неявной/обратной ф-ции).

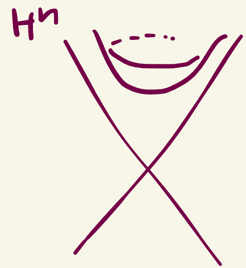
7) Аналогично, если $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{matrix} f_1(x) = c_1 \\ \vdots \\ f_k(x) = c_k \end{matrix} \right\}$ задано сист. ур-ий, т.что $\operatorname{rank} J(f_1, \ldots, f_k) = k$ всюду на M, тогда

M явл. гладким $(n-k)$-многообразием.

Частные случаи: 7.1) $S^n = \{ x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1 \}$

7.2) $H^n = \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; \begin{matrix} -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1 \\ x_0 > 0 \end{matrix} \right\}$

7.3) $SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in Mat_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \mid \det(A) = 1 \}$



$\dim SL_n(\mathbb{R}) = n^2 - 1$, т.к. $\det(A)$ – гладкая регулярная функция от $(a_{11}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$.

10. Касательное пространство. Гладкие отображения. Погружения и вложения.

Опр. $f: M \to N$ — гладкое отобр. гладких мн-ий ($f \in C^\infty(M,N)$), если оно гладкое в картах:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow \varphi_U & & \downarrow \psi_V \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \psi(V) \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

— гладкое $\tilde{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Опр. Гладкая кривая в M — это гладкое отобр. $\gamma: \mathbb{R}^1 \to M$.

Опр. (Касат. пр-во к M в точке x) $:= T_xM$ — семейство классов эквивалентности векторов скоростей кривых $\gamma \ni x$.

Заметим, что $\dim T_xM = n$ для всех $x \in M$. Если $f: M \to N$ — гл. отобр., то $d_x f: T_xM \to T_{f(x)}N$ — лин. отобр. касат. пр-в.

Опр. $f: M \to N$ — погружение (иммерсия), если f — гладкое и $d_x f$ — инъекция $\forall x \in M$.

$f: M \to N$ — вложение, если f — погружение и $M \approx f(M)$.

Предл.
1) f — гладкая инъекция + погружение, M — компакт $\Rightarrow$ f — вложение
2) f — собств. ($f^{-1}(K)$ — компакт), f — инъекция + погр $\Rightarrow$ f — вложение.

11. Теорема о существовании разбиения единицы, подчиненного атласу.

Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — атлас C^∞-мн-я M.

Опр. Разбиение единицы, подчинённое $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — это семейство непр. функций h_α со след. свойствами:

1) $0 \leq h_\alpha(x) \leq 1 \quad \forall \alpha \in A$
2) $\operatorname{supp} h_\alpha \subset U_\alpha \quad \forall \alpha \in A$
3) $\{\operatorname{supp} h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — лок. конечно
4) $\forall x \in M \quad \sum\limits_{\alpha \in A} h_\alpha(x) = 1.$

Теорема (о существовании гладкого разбиения 1)

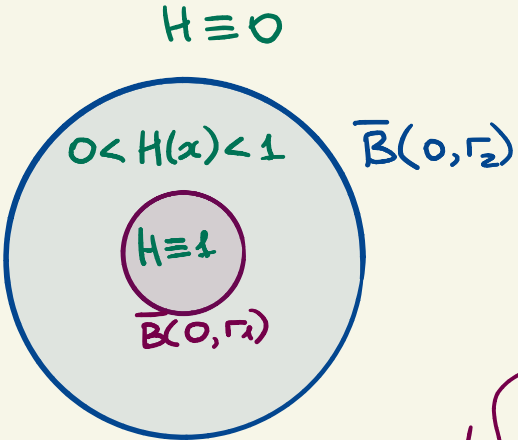
Для всякого гладкого многообразия M с краем или без края существует гладкое разбиение единицы (все функции в нем должны быть гладкими), подчиненное атласу многообразия M.

Док-во: 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$, явл. гладкой

2) $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 < r_2$, $\exists h(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$: $h(t) \equiv 1$ при $t \leq r_1$
$0 < h(t) < 1$ при $t \in (r_1, r_2)$
$h(t) \equiv 0$ при $t \geq r_2$

Hint: $$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}$$

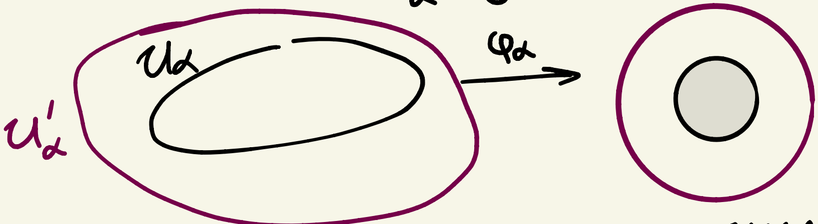
3) $\forall\ 0<r_1<r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $\exists\ H(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, т.что:



$H(x) := h(\cdot|x|)$, где $h(t)$ из п.(2).

4) Пусть $\varphi_\alpha : U_\alpha \to B(0,1)$.

Тогда $f_\alpha = H_\alpha \circ \varphi_\alpha$ на U'_α и $f_\alpha = 0$ на $M \setminus U_\alpha$.



Пусть $f(x) := \sum\limits_{\alpha \in A} f_\alpha(x)$. Ясно, что лишь конечное число $f_\alpha \neq 0$, и что $f(x) > 0$ всюду на M.

Тогда $g_\alpha(x) = f_\alpha(x)/f(x)$ дает гладкое разб. 1: $\sum\limits_\alpha g_\alpha \equiv 1$, $0 \le g_\alpha(x) \le 1$.

Внимание: тут есть некот. ошибки, пропущены тонкости с картами. Точнее, надо каждую карту отобр. в шар, в нем выбрать счетное число шаров, для каждого применить п.3), затем грамотно перенумеровать. $\blacksquare$