

МНОГОМЕРНЫЕ АФФИННЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. В трёхмерном аффинном пространстве заданы две скрещивающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Верно ли, что прямые (pq) , где $p \in \ell_1, q \in \ell_2$, заметают всё пространство?
2. Приведите пример конечномерного пространства V и таких трёх попарно трансверсальных (т.е. пересекающихся по началу координат) подпространств $U, W, T \subset V$, что $\dim U + \dim W + \dim T = \dim V$, но $U + W + T \neq V$.
3. Может ли пересечение положительного ортанта $\{(x, y, z, t) \mid x, y, z, t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^4$ с некоторой двумерной плоскостью быть квадратом?
4. Пусть $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 1$ для некоторых подпространств в \mathbb{R}^n . Обязательно ли $U + V$ равно одному из подпространств U, V , а $U \cap V$ — другому?
5. Опишите ГМТ в \mathbb{R}^3 , равноудалённых от
 - (а) двух скрещивающихся прямых,
 - (б) двух точек и прямой, не лежащих в одной плоскости.
6. Два вектора в евклидовом пространстве лежат по одну сторону от данной гиперплоскости. Угол между векторами тупой. Верно ли, что угол между их ортогональными проекциями на гиперплоскость тоже тупой?
7. В стандартном n -мерном кубе $\mathbb{I}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_k \leq 1\}$ найдите
 - (а) количество диагоналей, перпендикулярных данной;
 - (б) длину диагонали и её предел при $n \rightarrow \infty$;
 - (с) угол между диагональю и ребром, выходящими из одной вершины, и его предел при $n \rightarrow \infty$.
8. Сколько 3-мерных плоскостей симметрии у 4-мерного куба?
9. В стандартном n -мерном симплексе $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_j = 1, x_k \geq 0\}$ найдите
 - (а) радиусы вписанного и описанного шаров и их пределы при $n \rightarrow \infty$;
 - (б) угол между ребром и не содержащей его гранью.
10. Найдите объём правильного четырёхмерного симплекса, вписанного в шар радиуса 1.

МНОГОМЕРНЫЕ АФФИННЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. В трёхмерном аффинном пространстве заданы две скрещивающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Верно ли, что прямые (pq) , где $p \in \ell_1, q \in \ell_2$, заметают всё пространство?
2. Приведите пример конечномерного пространства V и таких трёх попарно трансверсальных (т.е. пересекающихся по началу координат) подпространств $U, W, T \subset V$, что $\dim U + \dim W + \dim T = \dim V$, но $U + W + T \neq V$.
3. Может ли пересечение положительного ортанта $\{(x, y, z, t) \mid x, y, z, t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^4$ с некоторой двумерной плоскостью быть квадратом?
4. Пусть $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 1$ для некоторых подпространств в \mathbb{R}^n . Обязательно ли $U + V$ равно одному из подпространств U, V , а $U \cap V$ — другому?
5. Опишите ГМТ в \mathbb{R}^3 , равноудалённых от
 - (а) двух скрещивающихся прямых,
 - (б) двух точек и прямой, не лежащих в одной плоскости.
6. Два вектора в евклидовом пространстве лежат по одну сторону от данной гиперплоскости. Угол между векторами тупой. Верно ли, что угол между их ортогональными проекциями на гиперплоскость тоже тупой?
7. В стандартном n -мерном кубе $\mathbb{I}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_k \leq 1\}$ найдите
 - (а) количество диагоналей, перпендикулярных данной;
 - (б) длину диагонали и её предел при $n \rightarrow \infty$;
 - (с) угол между диагональю и ребром, выходящими из одной вершины, и его предел при $n \rightarrow \infty$.
8. Сколько 3-мерных плоскостей симметрии у 4-мерного куба?
9. В стандартном n -мерном симплексе $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_j = 1, x_k \geq 0\}$ найдите
 - (а) радиусы вписанного и описанного шаров и их пределы при $n \rightarrow \infty$;
 - (б) угол между ребром и не содержащей его гранью.
10. Найдите объём правильного четырёхмерного симплекса, вписанного в шар радиуса 1.